

Doc. Ing. Jiří Melichar, CSc.:

LINEÁRNÍ SYSTÉMY 1

(Učební text)

KKY 2011

Obsah LS1:

ÚVOD

1. STAVOVÁ REPREZENTACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

1.1. Příklady stavového popisu reálných systémů	6
1.2. Rovnovážné a ustálené stavy dynamických systémů.....	12
1.3. Linearizace nelineárních dynamických systémů	13
1.4. Typy rovnovážných stavů LDS a průběh trajektorií systému	15
1.5. Stavový model LDS, řešení stavové rovnice	18
1.6. Vlastnosti spojitých lineárních dynamických systémů	20
1.7. Vstupně-výstupní ekvivalence lineárních dynamických systémů.....	25
1.8. Normální formy stavové reprezentace LDS	28

2. PŘENOSOVÁ FUNKCE SPOJITÝCH LDS

2.1. Laplaceova transformace	32
2.2. Přenosová funkce, základní pojmy, rozklad na parciální zlomky	33
2.3. Algebra blokových schémat	37
2.4. Přenosové funkce elementárních členů	41
2.5. Souvislosti mezi modely vnitřního a vnějšího popisu LDS.....	42

3. DYNAMICKÉ ODEZVY LDS

3.1. Časové odezvy LDS při vnitřním a vnějším popisu	47
3.2. Impulsní a přechodová funkce. Odezva na obecný vstupní signál	49
3.3. Frekvenční odezva LDS	56
3.4. Fourierova transformace. Frekvenční přenos.	60
3.5. Nyquistovy a Bodeho frekvenční charakteristiky	61
3.6. Frekvenční charakteristiky pro obecný tvar přenosu	68
3.7. Minimálně-fázové a neminimálně-fázové systémy	73

4. REGULAČNÍ OBVOD A STABILITA REGULAČNÍHO OBVODU

4.1. Struktura regulačního obvodu, přímovazební a zpětnovazební řízení.....	77
4.2. Přenosy v regulačním obvodu. Regulátory s jedním a dvěma stupni volnosti.....	79
4.3. Stabilita a kriteria stability regulačních obvodů.....	82
4.4. Robustnost ve stabilitě. Kritické zesílení, bezpečnost v zesílení a bezpečnost ve fázi.....	91
4.5. Metoda geometrického místa kořenů	94

5. DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

5.1. Regulační obvod při diskretním řízení spojitých LDS	99
5.2. Funkce diskretní v čase	103
5.3. Laplaceova transformace funkcí diskretních v čase. Z-transformace.....	104
5.4. Matematické modely pro vnější popis diskretních LDS	107
5.5. Diskretní stavový model spojitého LDS s tvarovačem 0.řádu	110
5.6. Diskretizace spojitých přenosů na základě aproximace integrálu nebo derivace	112
5.7. Transformační vztah $z = e^{pT}$ a převedení pólů spojitého LDS na póly diskretního LDS	114
5.8. Stavový model diskretních LDS, explicitní řešení stavové rovnice, základní odezvy	111
5.9. Vlastnosti diskretních LDS	117
5.10. Vzorkování spojitého signálu a Shannonova věta o rekonstrukci signálu	120

Doporučená a použitá literatura:

- Štecha J., Havlena V.: Teorie dynamických systémů, skr. ČVUT Praha, 2002
Havlena V., Štecha J.: Moderní teorie řízení, skr. ČVUT Praha, 2000
Goodwin G.C., Graebe S., Salgado M.: Control System Design, Prentice-Hall 2000
Aström K.J., Wittenmark B.: Computer Controlled System: Theory and Design, Prentice-Hall 1997
Wolovich W.A.: Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design, Saunders College Publishing 1994
Leigh J.R.: Applied Digital Control, Prentice Hall 1992

Obsah LS 2:

6. DETERMINISTICKÁ IDENTIFIKACE LDS

6.1. Lineární regrese a metoda nejmenších čtverců	5
---	---

7. POŽADAVKY NA REGULAČNÍ OBVOD A NÁVRHOVÁ OMEZENÍ

7.1. Stabilita a robustnost ve stabilitě, korekční články	8
7.2. Návrh diskretních korekčních článků	15
7.3. Přesnost regulace	19
7.4. Dynamický činitel regulace	20
7.5. Kmitavost uzavřené regulační smyčky	23
7.6. Citlivost uzavřené regulační smyčky na změnu parametrů řízeného systému	25
7.7. Tvarování frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky	25
7.8. Požadavky na kvalitu regulace v časové oblasti	28
7.9. Požadavky na kvalitu regulace v algebraické oblasti	29
7.10. Integrovaná omezení a dosažitelná kvalita regulace	30

8. ZÁKLADNÍ TYPY REGULÁTORŮ

8.1. Spojité PID (PI, PD) regulátory	35
8.2. Diskretní PID (PI, PD) regulátory	38
8.3. Obecný dynamický regulátor	39
8.4. Lineární stavový regulátor	39

9. KLASICKÉ METODY NÁVRHU REGULÁTORŮ

9.1. Empirické postupy při návrhu regulátorů	41
9.2. Návrh regulátorů dle požadavku na minimum integrálních kritérií kvality	43
9.3. Návrh regulátorů s využitím GMK	47
9.4. Návrh regulátorů dle požadovaného umístění pólů (nul) uzavřené regulační smyčky	53
9.5. Množina stabilizujících regulátorů, afinní parametrizace	58
9.6. Návrh regulátoru dle zadaného přenosu uzavřené regulační smyčky	70
9.7. Sledování obecného referenčního signálu a kompenzace poruch v ustáleném stavu („princip vnitřního modelu“)	73
9.8. Umístitelnost pólů lineárním stavovým regulátorem	75
9.9. Lineární stavový regulátor s integrací	78
9.10. Lineární stavový regulátor pro sledování obecného referenčního signálu a kompenzaci poruch v ustáleném stavu	79
9.11. Lineární stavový regulátor pro konečný počet kroků regulace	81
9.12. Dynamický regulátor pro řízení skokové odezvy polohového servosystému s konečným počtem kroků regulace	83
9.13. Návrh regulátorů pro LDS s dopravním zpožděním – Smithův prediktor	88

10. DETERMINISTICKÁ REKONSTRUKCE STAVU

10.1. Lineární asymptotický rekonstruktor stavu	91
10.2. Redukovaný rekonstruktor stavu (Luenbergerův, minimální)	94
10.3. Lineární stavový regulátor s rekonstruktorem stavu (dynamický kompenzátor)	97
10.4. Dynamický kompenzátor v regulačních úlohách	98

11. NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

11.1. Matematické modely nelineárních dynamických systémů	102
11.2. Metoda harmonické linearizace	103
11.3. Reléové regulační obvody	106
11.4. Ljapunovova teorie stability	109
11.5. Analýza stability LDS – Ljapunovy rovnice	112

Doporučená a použitá literatura:

- Štecha J., Havlena V.: Teorie dynamických systémů, skr. ČVUT Praha, 2002
Havlena V., Štecha J.: Moderní teorie řízení, , skr. ČVUT Praha, 2000
Goodwin G.C., Graebe S., Salgado M.: Control System Design, Prentice-Hall 2000
Aström K.J., Wittenmark B.: Computer Controlled System: Theory and Design, Prentice-Hall 1997
Wolovich W.A.: Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design, Saunders College Publishing 1994
Leigh J.R.: Applied Digital Control, Prentice Hall 1992

ÚVOD

Předkládané učební texty k předmětům Lineární systémy 1,2 jsou určeny především studentům bakalářského a magisterského studijního programu Aplikované vědy a informatika (AVI), obor Kybernetika a řídicí technika, ale i studentům jiných technických oborů, kteří získali základní znalosti z matematické analýzy (lineární algebra, lineární diferenciální rovnice), z teorie systémů a jsou seznámeni s programovým prostředím Matlab-Simulink.

Tématické okruhy přednášené látky se zabývají analýzou a návrhem systémů automatického řízení s omezením na deterministické spojité a diskrétní lineární dynamické systémy, obvykle s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO systémy).

V první kapitole je věnována pozornost problematice určení matematického modelu reálného dynamického systému na základě matematicko-fyzikálního modelování. Na typických příkladech reálných systémů je ukázáno, že získaný model je obvykle popsán nelineární diferenciální rovnicí vyššího řádu nebo soustavou takových rovnic (lineární model je spíše akceptovatelnou idealizací), tedy modelem vnějšího popisu. Vhodnou volbou stavových proměnných lze přejít na model vnitřního popisu a získat tak obecně nelineární stavovou reprezentaci jako soustavu nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Teprve po určení rovnovážných či ustálených stavů nelineárního dynamického systému (NDS), lze v jejich okolí provést linearizaci a získat lokální, aproximativní model v podobě stavové reprezentace lineárního dynamického systému (LDS). Stavové reprezentaci a vlastnostem LDS (stabilita, říditelnost, dosažitelnost, pozorovatelnost, rekonstruovatelnost, stabilizovatelnost, detekovatelnost, ekvivalence, dualita a j.) je věnována zbylá část kapitoly.

Použití Laplaceovy transformace ve druhé kapitole umožňuje zavést pojem přenosová funkce LDS, která vedle diferenciální rovnice je dalším modelem vnějšího popisu. Řešení diferenciálních rovnic je nahrazeno řešením algebraických rovnic, problémy analýzy i syntézy přechází do algebraické oblasti a je ukázáno, že algebra blokových schémat je účinným nástrojem pro zjednodušování složitých systémů či naopak pro vytvoření složitějších systémů z jednodušších. V této kapitole jsou vysvětleny nově zavedené pojmy (nuly, póly, časové konstanty, zesílení aj.), jsou analyzovány přenosové funkce elementárních členů a uvedeny vzájemné souvislosti modelů vnějšího a vnitřního popisu LDS.

Ve třetí kapitole je analýza systémů rozšířena do frekvenční oblasti použitím Fourierovy transformace a definováním frekvenčního přenosu LDS. Jsou zde zkoumány časové odezvy na typové vstupní signály pro modely vnitřního i vnějšího popisu LDS, impulsní a přechodové funkce (a charakteristiky) elementárních členů a použití konvoluce pro výpočet odezvy na obecný vstupní signál. Podrobně je zkoumána frekvenční odezva LDS na harmonický vstupní signál, frekvenční charakteristiky v komplexní rovině (Nyquist) a v logaritmických souřadnicích (Bode) a to pro elementární členy i pro obecný tvar přenosu.

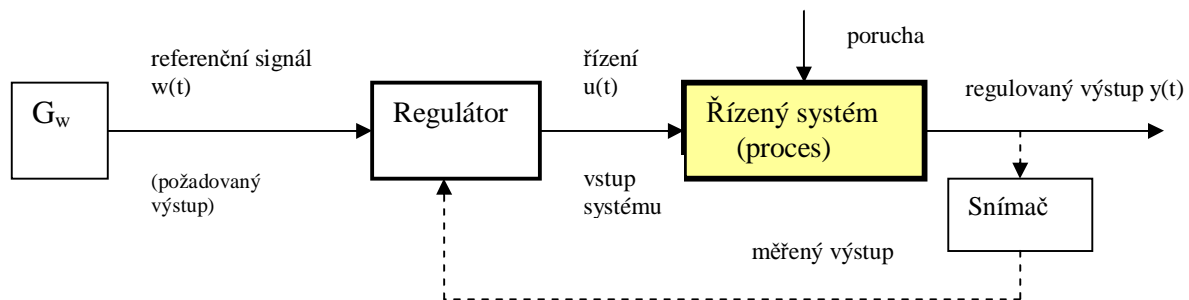
Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny základní struktury spojených regulačních obvodů používané v regulačních úlohách a při kompenzaci poruch, je vysvětlena funkce přímovazebního a zpětnovazebního řízení a význam regulátorů s jedním a dvěma stupni volnosti. Dále je analyzována stabilita a chování uzavřené regulační smyčky na základě vlastností otevřené regulační smyčky a to ve frekvenční oblasti (Nyquistovo kritérium stability) a v algebraické oblasti (geometrické místo kořenů - GMK).

Pátá kapitola je věnována diskrétním LDS a problémům číslicového (diskrétního) řízení spojených systémů. Výklad vychází ze struktury a funkce regulačního obvodu při číslicovém řízení spojených systémů a z problému vzorkování. Po zavedení Z-transformace jsou specifikovány modely vnějšího a vnitřního popisu diskrétních LDS a uvedeny vzájemné souvislosti se spojitými modely. Při analýze vlastností diskrétních LDS je upozorněno zejména na odlišnosti od spojených systémů. Z hlediska budoucího návrhu číslicových regulátorů sleduje přednášená látka dva základní přístupy k syntéze – návrh spojitého regulátoru a jeho následná diskretizace a přímý návrh číslicového regulátoru.

1. STAVOVÁ REPREZENTACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Primární funkcí prakticky každého řídicího systému (regulátoru) je regulovat chování jedné či více proměnných (regulovaných výstupů) na reálném řízeném systému či procesu tak, aby bylo dosaženo nějakých předem daných požadavků a to při současném respektování specifikovaných omezení a realizovatelnosti řídicího systému.

Řízený reálný systém či proces má jeden nebo více vstupů, na které lze působit řízením a následně docílit požadované změny chování regulovaných veličin. Řízení generuje jako svůj výstup regulátor a požadované chování je mu zadáváno v podobě referenčního signálu, jehož průběh by měl být sledován regulovanou veličinou. V případě, že je k dispozici přesný matematický model řízeného systému a jeho okolí a vylučujeme výskyt jakékoliv neurčitosti, lze požadovaného chování docílit výpočtem *přímovazebního řízení*, které je charakteristické tím, že regulátor nevyužívá zpětnou informaci o skutečném průběhu regulovaných veličin a vstupem regulátoru je pouze referenční signál. V reálných situacích je však nějaká forma neurčitosti vždy přítomna (matematický model řízeného systému není přesným modelem chování reálného systému, výskyt náhodných poruch, změny parametrů aj.), a proto dáváme přednost návrhu *zpětnovazebního řízení*, kdy regulátor kromě referenčního signálu využívá také informaci o skutečném průběhu regulovaných veličin a může tak reagovat na nežádoucí změny způsobené neurčitostí.



Přímovazební a zpětnovazební řízení

Návrh přímovazebního či zpětnovazebního řízení tedy předpokládá důkladnou znalost funkce a chování *reálného řízeného systému*, které musí být podchyceny vytvořením adekvátního *matematického modelu reálného řízeného systému*.

Matematický model reálného systému lze určit dvěma způsoby (nebo jejich kombinací):

- a/ *matematicko-fyzikálním modelováním* (model je odvozen ze znalosti fyzikálních zákonů – např. Newtonovské či Lagrangeovské mechaniky - lze určit strukturu i parametry modelu)
- b/ *experimentálně* (obvykle zvolíme strukturu matematického modelu, reálný systém vybudíme vhodným testovacím signálem a nějakou identifikační metodou identifikujeme parametry modelu s využitím souboru naměřených vstupních a výstupních dat)

Použití matematicko-fyzikálního modelování vede obvykle na matematický model vnějšího popisu, který popisuje účinek vybrané vstupní veličiny na reálném systému $u(t)$ na dynamické chování vybrané výstupní veličiny $y(t)$.

Spojité model může být v idealizovaném případě popsán lineární diferenciální rovnicí vyššího řádu s konstantními parametry

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t); \quad m \leq n \quad (1.1)$$

nebo obecněji nelineární diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) = f[y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)]; \quad f(\dots) \dots \text{nelineární funkce}, \quad (1.2)$$

přičemž stupeň nejvyšší derivace n určuje řád dynamického modelu.

Vhodnou volbou stavových (vnitřních) proměnných $x_1(t), \dots, x_n(t)$ lze uvedené rovnice převést na soustavu n lineárních či nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a získat tak stavové rovnice spolu s nedynamickou rovnicí pro sledovaný výstup systému, který je obecně funkcí

vnitřních proměnných a vstupu systému. Přejít tak na model vnitřního neboli stavového popisu, pro který používáme název stavová reprezentace dynamického systému.

Stavovou reprezentaci **lineárního** dynamického systému n -tého řádu s jedním vstupem a jedním výstupem (jedorozměrový systém) zapisujeme obvykle v maticovém tvaru

$$S(A, b, c^T): \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} u(t); \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \mathbf{M} \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \dots \text{vektor počátečního stavu} \quad (1.3)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c^T \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + du(t)$$

kde A, b, c^T, d jsou matice odpovídajících rozměrů s konstantními parametry, přičemž jejich konkrétní specifikace závisí na volbě stavových proměnných.

Stavovou reprezentaci **nelineárního** dynamického systému n -tého řádu s jedním vstupem a jedním výstupem zapisujeme ve tvaru

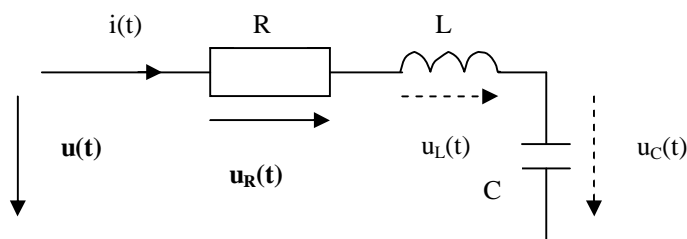
$$\begin{aligned} S: \dot{\mathbf{x}}(t) &= f_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)] && x_1(t_0), \dots, x_n(t_0) \dots \dots \dots \text{počáteční podmínky} && (1.4) \\ \mathbf{M} \quad \mathbf{M} &&& f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot), h(\cdot) \dots \text{obecně nelineární funkce} && \\ \dot{\mathbf{x}}_n(t) &= f_n[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)] && \text{stavových proměnných a vstupu.} && \\ \dots &&& && \\ y(t) &= h[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)] && && \end{aligned}$$

Poznamenejme, že prakticky všechny reálné systémy jsou nelineární, ale jednoduchá a účinná metodika analýzy systémů a návrhu řídicích systémů je vypracována zejména pro lineární dynamické systémy. Je tedy přirozenou snahou získat nějakou linearizační metodou lineární model i pro nelineární dynamické systémy, byť za cenu jeho omezené platnosti.

1.1. Příklady stavového popisu reálných systémů

Postup při určování stavových modelů lineárních a nelineárních dynamických systémů na základě matematicko-fyzikálního modelování ukážeme na několika typických příkladech jednorozměrových reálných systémů.

a) Jednoduchý RLC obvod



R, L, C ... odpor, indukčnost, kapacita
(konstantní parametry)
 $u(t)$... vstup (vstupní napětí)
 $u_R(t), u_L(t), u_C(t)$... napětí na impedancích
 $u_R(t)$... definovaný výstup $y(t)$
 $i(t)$... proud v obvodu
Předpokládáme nulové počáteční podmínky.

Z Kirchhoffova zákona $\sum_i u_i(t) = 0$ vyplývá základní vztah

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t) \quad (1.5)$$

Po formální derivaci dostáváme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními parametry

$$\frac{di^2(t)}{dt} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{du(t)}{dt} \quad (1.6)$$

Volbou stavových proměnných lze rovnici převést na dvě diferenciální rovnice 1. řádu a získat tak stavový model LDS. Z matematického hlediska není volba jednoznačná, z praktického hlediska je žádoucí vzít do úvahy např. jejich jednoduchou fyzikální interpretaci a měřitelnost. Použijeme-li např. metodu snižování řádu derivace, lze rovnici (1.6) upravit do tvaru

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} u(t) \right] + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (1.7)$$

Volbou stavových proměnných $x_1(t) = i(t)$ a $x_2(t) = \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} u(t)$ obdržíme po úpravě

$$\begin{aligned} \text{stavové rovnice:} \quad & \frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L} x_1(t) + x_2(t) + \frac{1}{L} u(t) \\ & \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{LC} x_1(t) \\ \text{a výstupní rovnici:} \quad & y(t) = R x_1(t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

V maticovém zápisu LDS zjistíme odpovídající tvar matic A, b, c^T s konstantními parametry:

$$S(A, b, c^T): \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 1 \\ -\frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [R \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

V daném případě byla volba stavové proměnné $x_2(t)$ provedena z matematických důvodů. Z praktického hlediska není proměnná $x_2(t)$ ani dobře fyzikálně interpretovatelná ani jednoduše měřitelná, a proto volbu $x_2(t)$ změním. Ponecháme $x_1(t) = i(t)$ a jako druhou stavovou proměnnou zvolíme napětí na kondenzátoru $x_2(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \int i dt$.

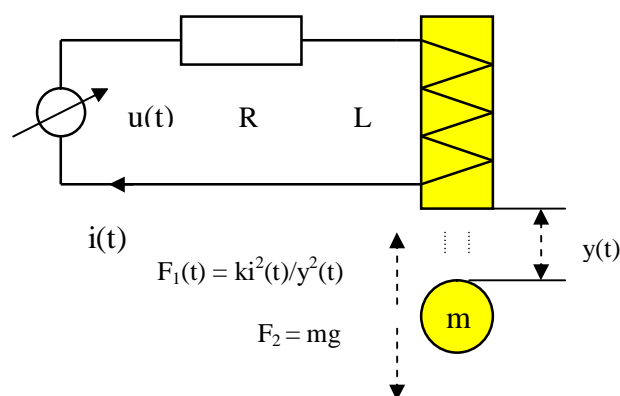
Dosažením do základního vztahu (1.5) dostaneme po úpravě stavovou reprezentaci LDS ve tvaru

$$S(A, b, c^T): \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [R \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Stavové reprezentace LDS (1.9) a (1.10) byly odvozeny ze stejné diferenciální rovnice a jsou tedy ekvivalentní z hlediska vstupně-výstupního chování daného systému - časový průběh stavových (vnitřních) veličin bude ovšem odlišný.

b/ Levitace kuličky v magnetickém poli

Řízení polohy kuličky v magnetickém poli je jednoduchou demonstrací principu využívaného v praxi u motorů s hřídelem „uloženým v magnetickém poli“ (tzv. magnetická ložiska).



$u(t)$... řízený zdroj napětí (proudu), **vstup systému**

R odpor vinutí cívky elektromagnetu

L indukčnost vinutí cívky elektromagnetu

m ... hmota kuličky

$i(t)$... proud vinutím

$y(t)$... poloha kuličky, **výstup systému**

$F_1(t)$... přitažná síla elektromagnetu

F_2 gravitační síla

g gravitační zrychlení, k ... konstanta

Akceptovaná zjednodušení při tvorbě modelu:

neuvažujeme odpor vzduchu, předpokládáme

nezávislost indukčnosti L na protékajícím proudu

Kombinací Kirchhoffova a Newtonova zákona dostaneme vzájemně provázané rovnice,

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \qquad m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = mg - \frac{ki^2(t)}{y^2(t)} \qquad (1.11)$$

kteří lze převést na nelineární diferenciální rovnici třetího řádu. Stavový model popisující řízenou levitaci kuličky bude tedy nelineárním dynamickým systémem třetího řádu.

Volbou stavových proměnných $x_1(t) = i(t)$; $x_2(t) = y(t)$; $x_3(t) = \dot{y}(t)$ dostaneme stavové rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L} x_1(t) + \frac{1}{L} u(t) \dots\dots\dots = f_1(x_1, x_2, x_3, u) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \dots\dots\dots = f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{kx_1^2(t)}{mx_2^2(t)} + g \dots\dots\dots = f_3(x_1, x_2, x_3, u) \end{aligned} \qquad (1.12)$$

$$\text{a výstupní rovnici: } y(t) = x_2(t) \dots\dots\dots = g(x_1, x_2, x_3, u) \qquad (1.13)$$

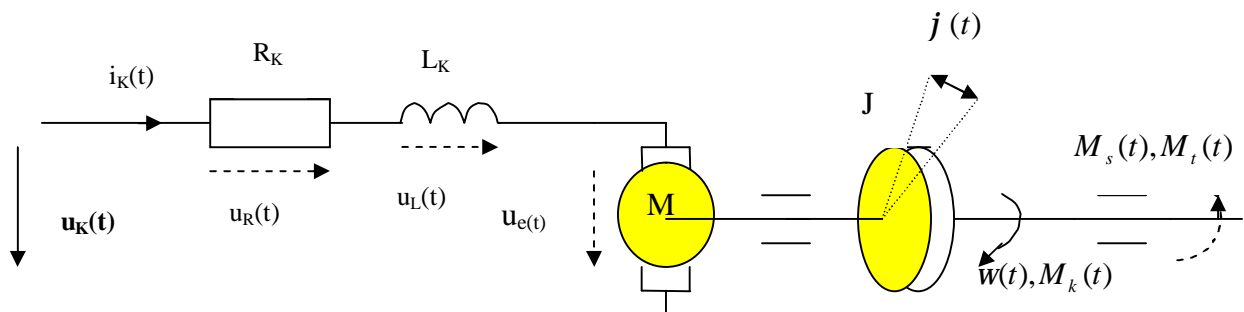
Poznamenejme, že přesnější nelineární model bychom získali respektováním skutečnosti, že indukčnost cívky na magnetickém jádře je nelineární funkcí protékajícího proudu $L = L[i(t)]$

a první rovnice by byla rovněž nelineární diferenciální rovnicí.

c/ Stejnoseměrný motor řízený do kotvy

S řízením rychlosti otáček či úhlu natočení hřídele (polohy) stejnosměrného motoru se setkáváme v nejrůznějších aplikacích, neboť stejnosměrný motor je velmi často používaný akční orgán, je používán jako pohonná jednotka - ať již pro rotační či translační pohyb, tvoří základní část servomechanismů a pod.

Jeho matematický model odvodíme za zjednodušujících (většinou akceptovatelných) předpokladů linearitu všech funkcí vystupujících v jeho popisu – viz schéma:



Označení:

R_K, L_K ... odpor a indukčnost vinutí kotvy (konstantní parametry)

$u_k(t)$... vstup (napětí přiváděné do kotvy motoru), $i_k(t)$... proud kotvy

$u_R(t), u_L(t)$... úbytky napětí na impedancích kotvy, $u_e(t) = k_e W(t)$... napětí vzniklé v důsledku rotace kotvy

$w(t), j(t)$... úhlová rychlost otáčení hřídele motoru, úhel natočení hřídele motoru - **definované výstupy y(t)**

J ... moment setrvačnosti rotoru (zátěže)

$M_k(t) = k_M i_k(t)$... krouticí moment motoru (přepokládáme lineární závislost na proudu kotvy; k_M je konst.)

$M_s(t) = J \frac{dw(t)}{dt}$... setrvačný moment

$M_t(t) = bw(t)$... třecí moment (přepokládáme lineární závislost na w ; b je konstanta viskózního tření)

Diferenciální rovnice popisující chování stejnosměrného motoru získáme z Kirchhoffova zákona, ze známého vztahu pro úhlovou rychlost otáčení $w(t) = dj(t)/dt$ a z rovnováhy momentů ($\sum_i M_i = 0$). Jinak řečeno, krouticí (hnací) moment motoru $M_k(t)$ se v každém časovém okamžiku „spotřebovává“ na setrvačný moment $M_s(t)$ a třecí (brzdňý) moment $M_t(t)$.

$$L_K \frac{di_K(t)}{dt} + R_K i_K(t) = u_K(t) - k_e w(t); \quad J \frac{dw(t)}{dt} + b w(t) = k_M i_K(t); \quad \frac{dj(t)}{dt} = w(t) \quad (1.14)$$

Budeme-li definovat výstup systému jako úhlovou rychlost $y(t) = w(t)$, nepotřebujeme třetí rovnici a po vyloučení vnitřní proměnné $i_K(t)$ lze model systému popsat jedinou lineární diferenciální rovnicí druhého řádu.

Pokud budeme definovat výstup systému jako úhel natočení hřídele $y(t) = j(t)$, lze po vyloučení vnitřních proměnných $i_K(t)$, $w(t)$ popsat model systému jedinou lineární diferenciální rovnicí třetího řádu. V obou případech je za vstup systému považováno napětí na kotvě $u_K(t)$.

Volbou měřitelných stavových proměnných $x_1(t) = i_K(t)$, $x_2(t) = w(t)$, $x_3(t) = j(t)$ lze upravit rovnice (1.14) a získat příslušné stavové reprezentace LDS druhého resp. třetího řádu.

Výstupem je úhlová rychlost $y(t) = w(t)$:

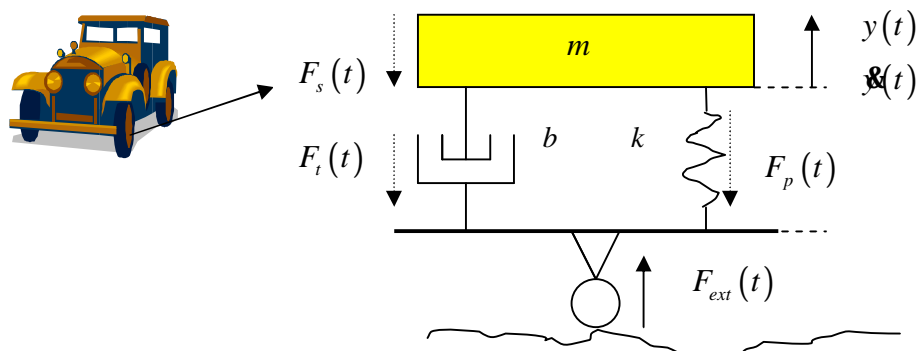
$$S(A, b, c^T): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_K}{L_K} & -\frac{k_e}{L_K} \\ \frac{k_M}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_K} \\ 0 \end{bmatrix} u_K(t); \quad y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Výstupem je úhel natočení hřídele motoru $y(t) = j(t)$:

$$S(A, b, c^T): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_K}{L_K} & -\frac{k_e}{L_K} & 0 \\ \frac{k_M}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_K} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_K(t); \quad y(t) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

d/ Jednoduchý tlumič

Jako příklad dynamického chování mechanické soustavy uvažujme zjednodušený model pérování nápravy automobilu dle uvedeného schéma. Za vstup systému považujeme externí sílu vyvozanou na nápravu v důsledku jízdy po nerovné podložce, výstupem je vzdálenost karoserie od podložky (silnice).



Označení:

$F_{ext}(t)$... vstup systému (externí síla); $y(t)$... výstup systému (vzdálenost karoserie od podložky)

m ... hmota karoserie; k ... konstanta pružiny; b ... konstanta viskózního tření

$F_s(t) = m d^2 y(t)/dt^2$... setrvačná síla; $F_p(t) = ky(t)$... síla pružiny; $F_t(t) = b dy(t)/dt$... třecí síla

Poznámka: Za těchto předpokladů získáme lineární model, obecně však síla pružiny resp. třecí síla mohou být nelineární funkce $F_p(t) = j[y(t)]$ resp. $F_t(t) = y[\dot{x}(t)]$.

Z rovnováhy sil ($\sum_i F_i = 0$) dostáváme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_{ext}(t) \quad (1.17)$$

Volbou stavových proměnných $x_1(t) = y(t)$; $x_2(t) = \dot{y}(t)$ (měření polohy a rychlosti) dostáváme stavové rovnice

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}F_{ext}(t)$$

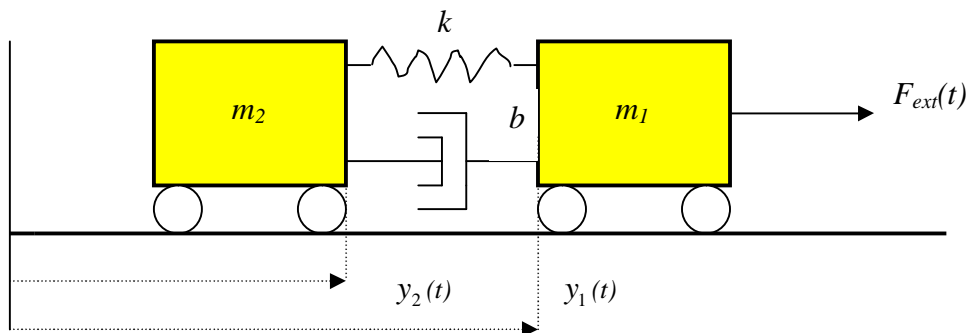
a výstupní rovnici $y(t) = x_1(t)$ (1.18)

V maticovém zápisu dostáváme hledaný model jako stavovou reprezentaci LDS 2. řádu

$$S(A, b, c^T): \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F_{ext}(t); \quad y(t) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

e/ Vozová souprava

Model dynamického chování vozové soupravy je rozšířenou aplikací použití tlumiče při spojení dvou hmotných těles. Vstupem systému je opět externí síla $F_{ext}(t)$, za výstup můžeme považovat například vzdálenost mezi vozidly $y(t) = y_2(t) - y_1(t)$. Ostatní označení a předpoklady (lineární závislost síly pružiny a třecí síly) ponecháváme stejné jako v předchozím příkladu.



Z rovnováhy sil dostaneme dvě vzájemně vázané lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Pro vůz s hmotností m_1 : $m_1 \ddot{y}_1(t) = -k[y_1(t) - y_2(t)] - b[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)] + F_{ext}(t)$

Pro vůz s hmotností m_2 : $m_2 \ddot{y}_2(t) = k[y_1(t) - y_2(t)] + b[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)]$ (1.20)

Jako stavové proměnné zvolíme jednoduše měřitelnou polohu a rychlost jednotlivých vozů $x_1(t) = y_1(t)$; $x_2(t) = \dot{y}_1(t)$; $x_3(t) = y_2(t)$; $x_4(t) = \dot{y}_2(t)$ a rovnice převedeme na čtyři lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Získáme stavové rovnice $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m_1}x_1(t) + \frac{k}{m_1}x_3(t) - \frac{b}{m_1}x_2(t) + \frac{b}{m_1}x_4(t) + \frac{1}{m_1}F_{ext}(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{k}{m_2}x_1(t) - \frac{k}{m_2}x_3(t) + \frac{b}{m_2}x_2(t) - \frac{b}{m_2}x_4(t)$$

a výstupní rovnici $y(t) = x_1(t) - x_3(t)$ (1.21)

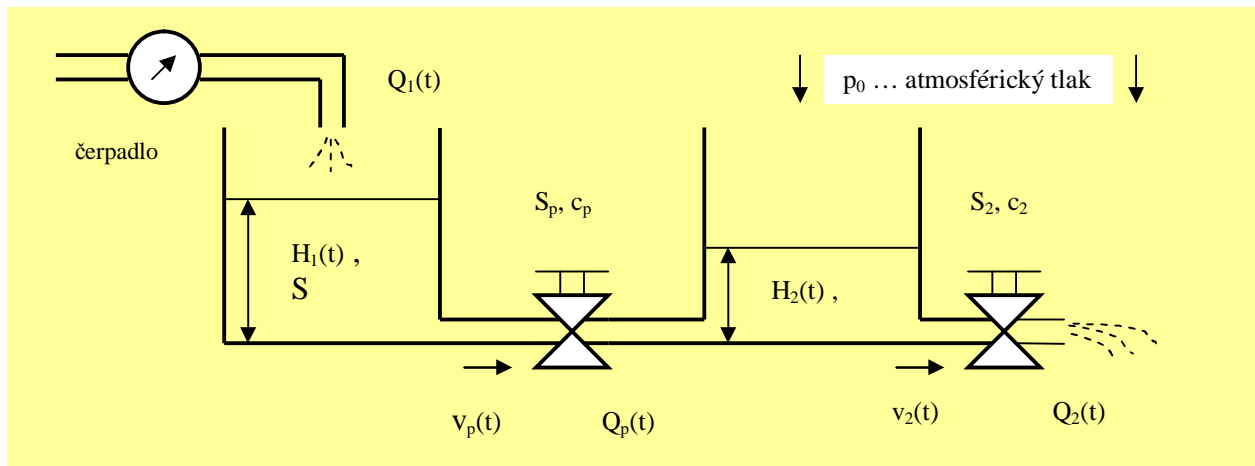
V maticovém zápisu dostáváme hledaný model jako stavovou reprezentaci LDS 4. řádu

$$S(A, b, c^T): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_1 & -b/m_1 & k/m_1 & b/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & b/m_2 & -k/m_2 & -b/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{ext}(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

f/ Soustava propojených nádrží

S požadavkem na řízení přítoku kapaliny do soustavy propojených nádrží za účelem regulace výšky hladin se setkáváme v praxi poměrně často, a proto jako poslední ilustrativní příklad určíme matematický model dynamiky změn výšky hladin v závislosti na přítoku kapaliny do soustavy propojených nádrží a při volném odtoku kapaliny do atmosféry (viz obr.):



Označení:

$Q_1(t)$...přítokové množství kapaliny [m^3/sec] - **vstup** ; $Q_p(t)$...průtokové množství; $Q_2(t)$...výtokové množství
 $H_1(t)$, $H_2(t)$... výšky hladin , za **výstup** systému zvolíme např. výšku hladiny v druhé nádrži $y(t) = H_2(t)$.

$v_p(t)$ resp. $v_2(t)$... průtoková resp. výtoková rychlost kapaliny [m/sec]

S ...plocha nádrží [m^2]; S_p resp. S_2 průřez průtokového resp. výtokového potrubí [m^2]

c_p , c_2 ... rychlostní součinitel ; r ... měrná hustota kapaliny; g ... gravitační zrychlení

Označíme-li $V_1(t)$ resp. $V_2(t)$ objem kapaliny v první resp. druhé nádrži, můžeme psát

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = S \frac{dH_1(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_p(t); \quad \frac{dV_2(t)}{dt} = S \frac{dH_2(t)}{dt} = Q_p(t) - Q_2(t) \quad (1.23)$$

přičemž průtokové resp. výtokové množství kapaliny lze vyjádřit pomocí průtokové resp. výtokové rychlosti kapaliny

$$Q_p(t) = c_p S_p v_p(t) \quad \text{a} \quad Q_2(t) = c_2 S_2 v_2(t) \quad (1.24)$$

Rychlosti proudění kapaliny $v_p(t)$ a $v_2(t)$ lze určit na sledované proudnici z Bernoulliova zákona (součet atmosférického, hydrostatického a hydrodynamického tlaku je konstantní).

$$\text{Průtokový ventil: } p_0 + r g H_1(t) = p_0 + r g H_2(t) + \frac{1}{2} r v_p^2(t) \Rightarrow v_p(t) = \sqrt{2g [H_1(t) - H_2(t)]}$$

$$\text{Výtokový ventil: } p_0 + r g H_2(t) = p_0 + \frac{1}{2} r v_2^2(t) \Rightarrow v_2(t) = \sqrt{2g H_2(t)} \quad (1.25)$$

Po dosazení (1.25) do (1.24) a následně (1.24) do (1.23) dostaneme dvě nelineární diferenciální rovnice prvního řádu, které můžeme považovat za stavové rovnice.

Reálný systém lze tedy popsat matematickým modelem ve tvaru *nelineárního* dynamického systému 2. řádu se stavovými proměnnými $H_1(t)$, $H_2(t)$ a s lineární výstupní rovnicí.

$$S: \begin{aligned} \frac{dH_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} + \frac{1}{S} Q_1(t) \dots\dots\dots = f_1[H_1(t), H_2(t), Q_1(t)] \\ \frac{dH_2(t)}{dt} &= \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} - \frac{1}{S} c_2 S_2 \sqrt{2gH_2(t)} \dots\dots\dots = f_2[H_1(t), H_2(t)] \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.2. Rovnovážné a ustálené stavy dynamických systémů

Lineární, t -invariantní dynamický systém n -tého řádu

$$S(A, B, C): \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m, \quad y(t) \in R^p, \quad m, p \leq n \\ y(t) = Cx(t) \quad (1.27)$$

Rovnovážné stavy $x_r \in R^n$ definujeme jako stavy neřízeného systému ($u(t) \equiv 0, \forall t$) ve kterých ustává veškerý pohyb v dynamickém systému, což lze vyjádřit podmínkou nulové časové derivace vektoru stavu $\dot{x}(t)|_{x=x_r} = 0$.

Rovnovážné stavy LDS jsou tedy určeny řešením lineární homogenní soustavy rovnic $Ax_r = 0$.

Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení:

- Je-li hodnota matice dynamiky rovna dimenzi vektoru stavu $h(A) = n$, potom existuje *jediné triviální řešení* $x_r = 0$.
- Je-li hodnota matice dynamiky menší než dimenze vektoru stavu $h(A) = k < n$, potom existuje *nekonečně mnoho řešení* x_r , z nichž lze nekonečně mnoha způsoby vybrat $n - k$ řešení lineárně nezávislých (matice A není regulární např. u systémů s astatismem).

Poznámka: Z matematického hlediska je rovnovážný stav x_r singulárním bodem řešení stavových rovnic. Tímto bodem procházejí (nebo zůstávají v jeho okolí) všechny trajektorie $x(t)$. Každým jiným bodem stavového prostoru prochází právě jedna trajektorie $x(t)$.

Za ustálené stavy („pracovní body“) $x_r \in R^n$ budeme považovat rovnovážné stavy systému při konstantním řízení $u(t) \equiv u_{konst.} \neq 0, \forall t$.

Ustálené stavy LDS jsou tedy určeny vztahem $x_r = -A^{-1}Bu_{konst.}$ (pro regulární matici A).

Z výstupní rovnice LDS vyplývá i existence rovnovážného či ustáleného výstupu $y_r = Cx_r$.

Nelineární, t -invariantní dynamický systém n -tého řádu

$$S: \quad \dot{x}(t) = f[x(t), u(t)]; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m, \quad y(t) \in R^p, \quad m, p \leq n \\ y(t) = h[x(t), u(t)] \quad f[\cdot], h[\cdot] \dots \text{dané nelineární (vektorové) funkce} \quad (1.28)$$

Definice rovnovážných a ustálených stavů x_r či výstupů y_r zůstává v platnosti i pro NDS:

$$\text{Rovnovážné stavy } x_r \text{ jsou dány řešením } 0 = f[x_r, 0], \text{ rovnovážný výstup } y_r = h[x_r, 0] \\ \text{Ustálené stavy } x_r \text{ jsou dány řešením } 0 = f[x_r, u_{konst.}], \text{ ustálený výstup } y_r = h[x_r, u_{konst.}] \quad (1.29)$$

Nelineární dynamický systém může mít *jeden nebo více rovnovážných stavů* a navíc může vzniknout i jeden nebo více rovnovážných stavů nazývaných **„izolované mezní cykly“**.

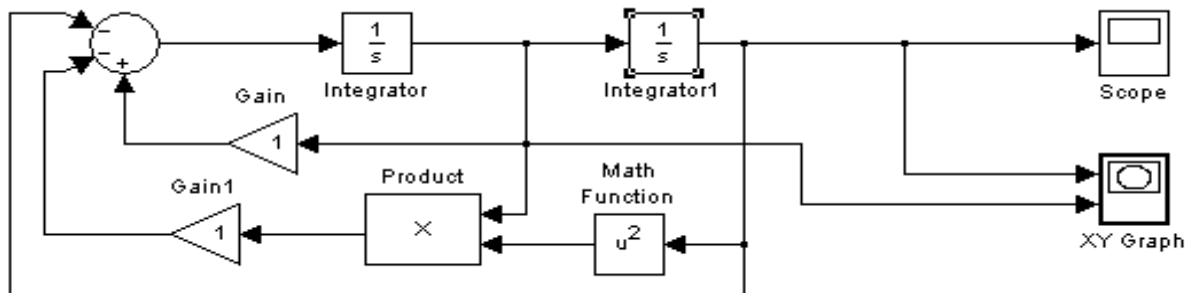
Jsou to periodická řešení nelineární diferenciální rovnice, která mohou nastat pouze při určitých počátečních podmínkách (netvoří kontinuum) a nevyskytují se u LDS. Ve stavovém prostoru se mezní cykly projevují jako uzavřené křivky, v časové oblasti jako periodické funkce.

Mezní cykly mohou být **stabilní** (trajektorie vycházející z počátečních podmínek v nějaké oblasti stavového prostoru konvergují k meznímu cyklu), **nestabilní** (trajektorie z libovolně malého okolí mezního cyklu divergují) a **polostabilní** (trajektorie mezního cyklu přecházejí).

Jako příklad ilustrující existenci stabilního mezního cyklu lze uvést Van der Polovu rovnici:

$$\ddot{x}(t) + 3[y^2(t) - 1]\dot{x}(t) + y(t) = 0 ; \quad y(0), \dot{x}(0) \dots \text{počáteční podmínky}$$

Na simulačním schéma stavové reprezentace tohoto neřízeného nelineárního dynamického systému lze ověřit existenci stabilního mezního cyklu pro libovolné počáteční podmínky (ověření ponecháváme na čtenáři).



1.3. Linearizace nelineárních dynamických systémů

I když dynamické chování většiny fyzikálních systémů je nelineárního charakteru, mnoho z těchto systémů se chová „téměř lineárně“ při malých změnách systémových proměnných. Nabízí se tak možnost nahradit model nelineárního dynamického systému jeho linearizovaným modelem, získaným linearizací stavové a výstupní rovnice NDS v okolí *rovnovážných nebo ustálených stavů* – „pracovních bodů“. Jedná se tedy o *lokální aproximativní linearizaci* NDS. Pokud budou vlastnosti NDS odvozovány z jeho linearizovaného modelu, je vždy nutno mít na zřeteli jejich lokální (vlastně „bodovou“) platnost a možnost i výrazných změn těchto vlastností při větších odchylkách systémových proměnných od „pracovního bodu“.

Poznámka:

Za určitých podmínek lze nelineární transformací stavu a vstupu převést NDS přímo na lineární dynamický systém, jehož vlastnosti (např. stabilita) potom vykazují globální platnost. Tento přístup se nazývá *exaktní linearizace* NDS, překračuje však rámec přednášené látky v LS1,2 a nebudeme se jím dále zabývat.

Uvažujme nelineární dynamický systém (1.28)

$$\begin{aligned} \text{S: } \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t)] & x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p ; & f[\cdot] \text{ resp. } h[\cdot] \text{ jsou dané} \\ y(t) &= h[x(t), u(t)] & n - \text{ rozměrné resp. } p - \text{ rozměrné nelineární vektorové funkce} \end{aligned}$$

a vytvořme jeho linearizovaný model, který by měl aproximovat chování NDS v blízkém okolí ustáleného stavu (pracovního bodu) x_r , určeného vztahy (1.29).

Blízké okolí pracovního bodu budeme respektovat zavedením *odchylkových proměnných*

$$\begin{aligned} \Delta x(t) = x(t) - x_r & \Rightarrow x(t) = x_r + \Delta x(t) \\ \Delta u(t) = u(t) - u_{konst.} & \Rightarrow u(t) = u_{konst.} + \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = y(t) - y_r & \Rightarrow y(t) = y_r + \Delta y(t) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Linearizovaný model získáme rozvojem nelineárních vektorových funkcí $f[\cdot]$ resp. $h[\cdot]$ ve stavové resp. výstupní rovnici NDS v Taylorovu řadu v okolí pracovního bodu při zanedbání vyšších členů rozvoje.

Pro stavovou a výstupní rovnici dostáváme

$$\dot{\mathbf{x}} + \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = f[x_r + \Delta x(t), u_{konst} + \Delta u(t)] = f(x_r, u_{konst}) + \frac{\partial f[\cdot]}{\partial x} \Big|_{x_r, u_{konst}} [x(t) - x_r] + \frac{\partial f[\cdot]}{\partial u} \Big|_{x_r, u_{konst}} [u(t) - u_{konst}]$$

$$y_r + \Delta y(t) = h[x_r + \Delta x(t), u_{konst} + \Delta u(t)] = h(x_r, u_{konst}) + \frac{\partial h[\cdot]}{\partial x} \Big|_{x_r, u_{konst}} [x(t) - x_r] + \frac{\partial h[\cdot]}{\partial u} \Big|_{x_r, u_{konst}} [u(t) - u_{konst}]$$

a protože pro ustálený stav resp. výstup platí $\dot{\mathbf{x}}_r = 0 = f(x_r, u_{konst})$ resp. $y_r = h(x_r, u_{konst})$, dostaneme stavovou a výstupní rovnici linearizovaného modelu v odchylkových proměnných

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial f[\cdot]}{\partial x} \Big|_{x_r, u_{konst}} \Delta x(t) + \frac{\partial f[\cdot]}{\partial u} \Big|_{x_r, u_{konst}} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \frac{\partial h[\cdot]}{\partial x} \Big|_{x_r, u_{konst}} \Delta x(t) + \frac{\partial h[\cdot]}{\partial u} \Big|_{x_r, u_{konst}} \Delta u(t) \end{aligned} \quad (1.31)$$

V blízkém okolí pracovního bodu jsou tyto rovnice formálně shodné se stavovou reprezentací lineárního dynamického systému

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); & \mathbf{x}(t) \in R^n, \mathbf{u}(t) \in R^m, \mathbf{y}(t) \in R^p \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) & A \dots nxn, B \dots nxm, C \dots pxn, D \dots pxm \end{aligned} \quad (1.32)$$

přičemž matice A, B, C, D jsou určeny z *Jacobiových matic* po dosazení veličin definujících pracovní bod ($\mathbf{x}(t) = x_r$ a $\mathbf{u}(t) = u_{konst}$):

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial f[\cdot]}{\partial x} \Big|_{x_r, u_{konst}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x_1} & \mathbf{L} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x_n} \\ & \mathbf{M} & \\ \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial x_1} & \mathbf{L} & \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} & B = \frac{\partial f[\cdot]}{\partial u} \Big|_{x_r, u_{konst}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u_1} & \mathbf{L} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u_m} \\ & \mathbf{M} & \\ \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial u_1} & \mathbf{L} & \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \\ C = \frac{\partial h[\cdot]}{\partial x} \Big|_{x_r, u_{konst}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial x_1} & \mathbf{L} & \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial x_n} \\ & \mathbf{M} & \\ \frac{\partial h_p(\cdot)}{\partial x_1} & \mathbf{L} & \frac{\partial h_p(\cdot)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} & D = \frac{\partial h[\cdot]}{\partial u} \Big|_{x_r, u_{konst}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial u_1} & \mathbf{L} & \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial u_m} \\ & \mathbf{M} & \\ \frac{\partial h_p(\cdot)}{\partial u_1} & \mathbf{L} & \frac{\partial h_p(\cdot)}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Příklad 1.1. :

Určete linearizovaný model soustavy propojených nádrží v okolí ustáleného stavu, představovaného při nějakém konstantním přiváděném množství kapaliny Q_{1konst} ustálenými hodnotami výšky hladin H_{1r}, H_{2r} . Při odvození zachovejte význam fyzikálních proměnných.

Řešení:

1/ Soustava byla popsána stavovým nelineárním dynamickým modelem 2. řádu (viz 1.26) s lineární výstupní rovnicí:

$$\begin{aligned} \frac{dH_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} + \frac{1}{S} Q_1(t) \dots\dots\dots = f_1[H_1(t), H_2(t), Q_1(t)] \\ \frac{dH_2(t)}{dt} &= \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} - \frac{1}{S} c_2 S_2 \sqrt{2gH_2(t)} \dots\dots\dots = f_2[H_1(t), H_2(t)] \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2/ Ustálený stav H_{1r}, H_{2r} při konstantním přítoku Q_{1konst} určíme dle (1.29) řešením rovnic

$$0 = -\frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g [H_{1r} - H_{2r}]} + \frac{1}{S} Q_{1konst} \dots\dots\dots = f_1 [H_{1r}, H_{2r}, Q_{1konst}]$$

$$0 = \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g [H_{1r} - H_{2r}]} - \frac{1}{S} c_2 S_2 \sqrt{2g H_{2r}} \dots\dots\dots = f_2 [H_{1r}, H_{2r}]$$

3/ Linearizované stavové rovnice pro blízké okolí ustáleného stavu určíme výpočtem

Jacobiových matic v ustáleném stavu $\left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial H} \right|_{H_r, Q_{1konst}} \equiv A$, $\left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial Q_1} \right|_{H_r, Q_{1konst}} \equiv b$ (viz 1.31 – 1.33).

Výstupní rovnici není třeba linearizovat, neboť je lineární.

Stavovou reprezentaci linearizovaného modelu v přírůstkových proměnných získáme ve tvaru

$$\Delta \dot{\mathbf{H}}_1(t) = -\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} \Delta H_1(t) + \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} \Delta H_2(t) + \frac{1}{S} \Delta Q_1(t)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{H}}_2(t) = \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} \Delta H_1(t) - \left[\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} + \frac{c_2 S_2 \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{2r}}} \right] \Delta H_2(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$$

4/ Stavová reprezentace linearizovaného modelu NDS v maticovém zápisu je formálně shodná s maticovým zápisem lineárního t-invariantního dynamického systému 2. řádu s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO)

S: $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + bu(t)$; $x(t) \in R^2$, $u(t), y(t) \in R^1$
 $y(t) = c^T x(t)$,

což v našem případě odpovídá zápisu

S: $\begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{H}}_1(t) \\ \Delta \dot{\mathbf{H}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Delta Q_1(t)$; $\begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$ (odchylkový) vektor stavu
 $\Delta y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$; $\Delta Q_1(t)$...odchylka od Q_{1konst} , $\Delta y(t)$...odchylka od y_r .

Hodnoty parametrů v maticích A, b, c^T jsou zřejmé z předchozích rovnic v rozepsaném tvaru.

1.4. Typy rovnovážných stavů LDS a průběh trajektorií systému

Uvažujme neřízený lineární t -invariantní dynamický systém

S: $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$; $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^1$, $x(t_0) = x_0 \neq 0$... nenulové počáteční podmínky (1.34)
 $y(t) = c^T x(t)$ $x_r = 0$... nulový rovnovážný stav ($\det A \neq 0$)

Řešení stavové rovnice $x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$ nám dává představu o časovém průběhu stavových veličin $x_1(t), \dots, x_n(t)$. V každém časovém okamžiku $t \in [t_0, t]$ představuje řešení $x(t)$ nějaký bod ve stavovém prostoru R^n a pohyb tohoto bodu znázorňuje *trajektorii systému*.

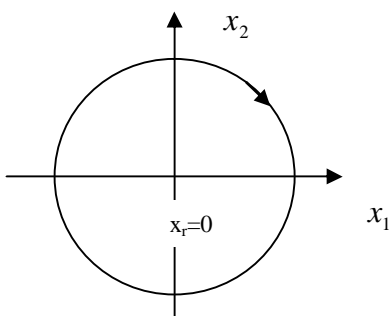
Chování LDS v okolí rovnovážného stavu x_r můžeme tedy posuzovat i podle průběhu trajektorií systému, které získáme vyloučením času z řešení $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

Poznámka: Z podmínek existence a jednoznačnosti řešení stavové rovnice vyplývá, že každým bodem $x \in R^n$ prochází jediná trajektorie, singulárním bodem řešení, t.j. *rovnovážným stavem* x_r však může procházet více trajektorií nebo se mohou nacházet v jeho libovolně blízkém okolí.

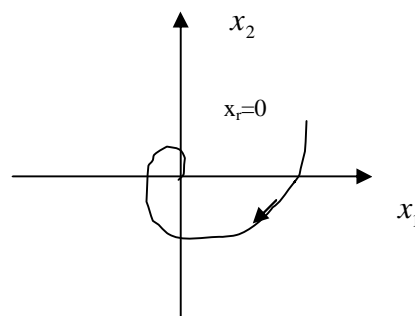
Průběh trajektorií systému závisí na vlastních číslech matice dynamiky $\{I_i(A)\}_{i=1}^n$. Ta mohou být *reálná, ryze imaginární či komplexně sdružená*, přičemž reálná vlastní čísla či reálné části komplexně sdružených vlastních čísel mohou být čísla záporná nebo kladná a rozhodují tak o stabilitě či nestabilitě řešení $x(t)$, resp. o typu a stabilitě rovnovážného stavu.

Typy rovnovážných stavů **střed, ohnisko, uzel a sedlo** a typické průběhy trajektorií pro LDS

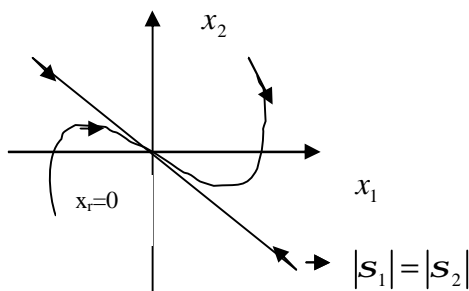
2. řádu pro daný počáteční stav $x(t_0)$ jsou schématicky znázorněny na následujících obrázcích:



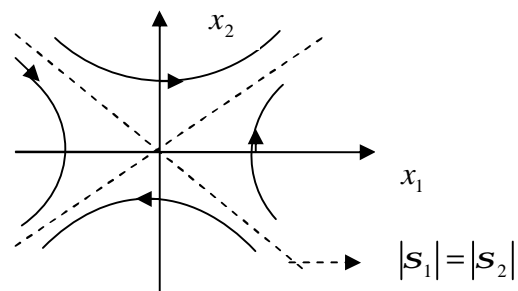
Rovnovážený stav $x_r=0$ typu „**střed**“
 $I_{1,2}(A) = \pm j\omega \dots$ (ryze imaginární)
 Časový průběh $x(t)$ je kmitavý, netlumený



Rovnovážený stav $x_r=0$ typu „**ohnisko**“ (stabilní)
 $I_{1,2}(A) = -s \pm j\omega \dots$ (komplexně sdružená)
 Časový průběh $x(t)$ je kmitavý, tlumený



Rovnovážený stav $x_r=0$ typu „**uzel**“ (stabilní)
 $I_{1,2}(A) = -s_1, -s_2 \dots$ (stejná znaménka)
 Časový průběh $x(t)$ je nekmitavý, aperiodický



Rovnovážený stav $x_r=0$ typu „**sedlo**“ (vždy nestabilní)
 $I_{1,2}(A) = -s_1, +s_2 \dots$ (různá znaménka)
 Časový průběh $x(t)$ je nekmitavý, aperiodický

Charakter průběhu trajektorií a vlastnosti **lineárního** dynamického systému se pro určený typ rovnovážného stavu nemění se změnou počátečních podmínek a mají tedy globální charakter.

Chceme-li určit průběh trajektorií v okolí rovnovážného stavu u **nelineárního** dynamického systému, určíme nejprve jeho *linearizovaný model* v příslušném rovnovážném stavu (rovnovážných stavů může být více!) a o jeho typu a stabilitě rozhodujeme podle vlastních čísel matice dynamiky linearizovaného modelu (viz Jacobiova matice).

Existuje ale důležitá výjimka:

O typu a stabilitě rovnovážného stavu nelze rozhodnout, pokud matice dynamiky linearizovaného modelu má vlastní čísla na imaginární ose.

Charakter průběhu trajektorií a vlastnosti nelineárního dynamického systému pro určený typ rovnovážného stavu závisí na počátečních podmínkách a mají tedy pouze lokální charakter.

Příklad 1.2.:

Určete typ a stabilitu rovnovážných stavů systému, popsaného

1/ lineární diferenciální rovnicí (netlumený harmonický oscilátor)

$$x''(t) + y(t) = 0 ; \quad y(0) = 1, x(0) = 0 \dots \text{poč. podmínky}$$

2/ nelineární diferenciální rovnicí

$$x''(t) + ax'(t) - by(t) + cy^3(t) = 0 ; \quad y(0), x(0) \dots \text{poč. podmínky, parametry } a, b, c > 0$$

3/ nelineární diferenciální rovnicí (viz Van der Polova rovnice v odstavci 1.2.)

$$x''(t) + 3[y^2(t) - 1]x'(t) + y(t) = 0 ; \quad y(0), x(0) \dots \text{poč. podmínky}$$

Řešení:

1/ Zvolíme-li stavové proměnné $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, dostaneme stavové rovnice systému

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) & x_1(0) &= 1, x_2(0) = 0 \dots \text{poč. stav, } x_{1r} = x_{2r} = 0 \dots \text{rovnovážný stav} \\ x_2'(t) &= -x_1(t) \end{aligned}$$

V maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla matice dynamiky jsou ryze imaginární $I_{1,2}(A) = \pm j$ a rovnovážný stav $x_r = 0$ je

typu „**střed**“ \Rightarrow trajektorie systému ve stavovém prostoru budou kružnice (**pro libovolný počáteční stav**).

Přesvědčíme se o tom určením rovnice trajektorie vyloučením času z řešení stavové rovnice $x(t) = e^{At}x(0)$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \Rightarrow x_1^2(t) + x_2^2(t) = 1 \text{ (rovnice kružnice ve stavové rovině).}$$

nebo „alternativně, přímou integrací stavových rovnic

$$\frac{dx_2(t)}{dx_1(t)} = -\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \Rightarrow \frac{x_1^2(t)}{2} + \frac{x_2^2(t)}{2} = k, \text{ integrační konstanta } k=1/2 \text{ (určena z počátečních podmínek).}$$

2/ Zvolíme opět stavové proměnné $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = x'(t)$ a dostaneme stavové rovnice

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \equiv f_1(x_1, x_2) & x_1(0), x_2(0) \dots \text{poč. stav} \\ x_2'(t) &= bx_1(t) - cx_1^3(t) - ax_2(t) \equiv f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Položením $x_1' = 0, x_2' = 0$ zjistíme, že nelineární systém má 3 rovnovážné stavy

$${}^1x_r = (0,0), \quad {}^2x_r = (+\sqrt{b/c}, 0), \quad {}^3x_r = (-\sqrt{b/c}, 0)$$

V každém rovnovážném stavu určíme linearizovaný model NDS, resp. příslušné matice dynamiky (viz 1.33)

$${}^1A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^1x_r}, \quad {}^2A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^2x_r}, \quad {}^3A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^3x_r}$$

Vlastní čísla těchto matic potom charakterizují typ rovnovážného stavu, jeho stabilitu či nestabilitu a průběh trajektorií v **blízkém okolí** rovnovážného stavu.

Pro ${}^1x_r = (0,0)$:
$${}^1A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^1x_r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b - 3cx_1^2 & -a \end{bmatrix} \Big|_{x_r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla 1A : $\det(II - {}^1A) = 0 \Rightarrow I_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \Rightarrow {}^1x_r = (0,0)$ je „**sedlo**“.

Pro ${}^2x_r, {}^3x_r = (\pm\sqrt{b/c}, 0)$:
$${}^{2,3}A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^{2,3}x_r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2b & -a \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla ${}^{2,3}A$: $\det(II - {}^{2,3}A) = 0 \Rightarrow I_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8b}}{2} \Rightarrow$ rovnovážné stavy

${}^2x_r, {}^3x_r = (\pm\sqrt{b/c}, 0)$ jsou buď „**stabilními uzly**“ ($a^2 - 8b \geq 0$) nebo „**stabilními ohnisky**“ ($a^2 - 8b < 0$).

3/ Zvolíme opět $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \mathfrak{f}(t)$ a dostaneme

$$\mathfrak{f}_1(t) = x_2(t) \equiv f_1(x_1, x_2)$$

$x_1(0), x_2(0) \dots$ poč. stav

$$\mathfrak{f}_2(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) - 3x_1^2(t)x_2(t) \equiv f_2(x_1, x_2)$$

Položením $\mathfrak{f}_1 = 0$, $\mathfrak{f}_2 = 0$ zjistíme, že nelineární systém má rovnovážný stav $x_{1r} = x_{2r} = 0$.

Linearizovaný model má matici dynamiky $A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_r=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, vlastní čísla matice A jsou

$$I_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{rovnovážný stav } x_{1r} = x_{2r} = 0 \text{ je „nestabilní uzel“}.$$

Tento systém má ještě rovnovážný stav typu „stabilní mezní cyklus“ (viz příklad v odst. 1.2), ke kterému směřují i trajektorie z blízkého okolí rovnovážného stavu „nestabilní uzel“.

1.5. Stavový model LDS, řešení stavové rovnice

Uvažujme stavový model lineárního t-invariantního dynamického systému n – tého řádu

S: $\mathfrak{f}(t) = Ax(t) + Bu(t)$; $x(t_0) = x_0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $m, p \leq n$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.35}$$

Řešení stavové rovnice sestává z homogenního a partikulárního řešení a má tvar

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{1.36}$$

Homogenní řešení $x_h(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$ lze interpretovat jako stavovou odezvu na počáteční

podmínky při nulovém vstupu $u(t)$, partikulární řešení $x_p(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ jako stavovou

odezvu na vstup $u(t)$ při nulových počátečních podmínkách. Matice e^{At} je stavová matice přechodu.

Poznámka:

Homogenní i partikulární řešení vyhovují stavové rovnici, o čemž se lze přesvědčit jejich dosazením do (1.35). Pro derivaci partikulárního řešení použijeme Leibnitzovo pravidlo o derivaci integrálu dle horní meze:

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t f(t, \tau)d\tau \Rightarrow \dot{x}_p(t) = f(t, t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} f(t, \tau)d\tau$$

Výpočet stavové matice přechodu e^{At} :

$$1/ \text{Rozvojem v řadu: } e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots \tag{1.37}$$

$$2/ \text{ Použitím zpětné Laplaceovy transformace: } e^{At} = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} \tag{1.38}$$

3/ Využití modální transformace.

Z lineární algebry víme, že každou čtvercovou matici $A_{n \times n}$ lze převést na diagonální či blokově diagonální matici D pomocí „modální“ transformační matice V tak, že platí $D = V^{-1}AV$.

Sloupce matice V jsou pravé vlastní vektory příslušné vlastním číslům $I_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, řádky V^{-1} jsou levé vlastní vektory.

a/ Matice A nemá násobná vlastní čísla

V tomto případě jsou na diagonále matice $D = V^{-1}AV$ vlastní čísla $I_i(A)$, $i = 1, \dots, n$.

Protože také platí $A = VDV^{-1}$, můžeme stavovou matici přechodu vyjádřit řadou

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots = VV^{-1} + \frac{VDV^{-1}t}{1!} + \frac{VDV^{-1}VDV^{-1}t^2}{2!} + \dots = V\left(I + \frac{Dt}{1!} + \frac{D^2 t^2}{2!} + \dots\right)V^{-1} =$$

$$= Ve^{Dt}V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^{l_1 t} & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{L} & e^{l_n t} \end{bmatrix} V^{-1} \quad (1.39)$$

b/ Matice A má násobná vlastní čísla (předpokládáme n lineárně nezávislých vlastních vektorů)
 Uvažujme např. k-násobné vlastní číslo l_1 . V tomto případě se bude na diagonále matice D nacházet $k \times k$ matice J_1 („Jordanova klec“) a nenásobná vlastní čísla $l_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, n-k$:

$$D = \begin{bmatrix} l_1 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & [J_1] & \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{L} & l_{n-k} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } [J_1] = \begin{bmatrix} l_1 & 1 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & 1 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & l_1 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Stavovou matici přechodu určíme stejným postupem jako v předchozím případě a dostaneme

$$e^{At} = V \begin{bmatrix} e^{l_1 t} & & & \\ & [e^{J_1 t}]_{k \times k} & & \\ & & e^{l_{n-k} t} & \\ & & & \end{bmatrix} V^{-1}, \quad \text{kde } e^{J_1 t} = \begin{bmatrix} e^{l_1 t} & \mathbf{L} & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{l_1 t} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{L} & e^{l_1 t} \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (1.40)$$

4/ Využití Cayley-Hamiltonovy věty pro maticové konvergentní funkce

Věta 1-1: (Cayley-Hamiltonova)

Každá čtvercová matice A vyhovuje své charakteristické rovnici.

Aplikujme větu na matici dynamiky neřízeného lineárního dynamického systému

S: $\dot{x}(t) = Ax(t)$; $x(t) \in R^n$, $l_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, jsou známá vlastní čísla matice A.

Pro danou matici A určíme *charakteristickou rovnici* $\det(lI - A) = 0$

$$\det(lI - A) = l^n + a_{n-1}l^{n-1} + \dots + a_1l + a_0 = 0 \quad (\text{rovnici vyhovují všechna } l_i(A), i = 1, \dots, n).$$

Podle Cayley-Hamiltonovy věty musí matice A vyhovovat své charakteristické rovnici

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

Z rovnice lze vyjádřit maticovou funkci $f(A) = A^n$ jako maticový polynom $P(A)$, st $P(A) = n-1$

$$f(A) \equiv A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I = P(A) \quad (1.41)$$

Podle C.-H. věty, můžeme maticovou funkci $f(A)$ vyjádřit jako funkci proměnné l_i , $i = 1, \dots, n$

$$f(l_i) \equiv l_i^n = -a_{n-1}l_i^{n-1} - \dots - a_1l_i - a_0 = P(l_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.42)$$

Dostaneme tak n rovnic pro výpočet koeficientů a_0, a_1, \dots, a_{n-1} a po jejich dosazení do

maticového polynomu $P(A)$ určíme maticovou funkci $f(A) \equiv A^n$.

Tento postup lze použít pro libovolnou konvergentní maticovou funkci, kterou vyjádříme maticovým polynomem stupně $n-1$ s neznámými koeficienty (viz Gantmacher: Teorie matic). Jak jsme ukázali, pro výpočet maticové funkce je postačující znalost vlastních čísel matice A.

Můžeme tak vypočítat např. maticové funkce $A^{1/2}$, A^k ($k < n$), $\ln A$ nebo e^A , a tedy i stavovou matici přechodu e^{At} . Při k -násobném vlastním čísle I_i matice A použijeme pro určení koeficientů a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ještě $k-1$ derivací vztahu (1.42).

Příklad 1.3.:

Určete stavovou matici přechodu e^{At} pro netlumený harmonický oscilátor (viz Příklad 1 v odstavci 1.4.) použitím
a/ Zpětné Laplaceovy transformace **b/** Modální transformace **c/** C.-H. věty pro maticové funkce

Řešení:

Matice dynamiky netlumeného lineárního harmonického oscilátoru je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $I_{1,2} = \pm i$, $n = 2$.

$$a/ e^{At} = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 1} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{p}{p^2 + 1} & \frac{1}{p^2 + 1} \\ -\frac{1}{p^2 + 1} & \frac{p}{p^2 + 1} \end{pmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$b/ e^{At} = Ve^{D^t}V^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ i\sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (e^{it} + e^{-it})/2 & (e^{it} - e^{-it})/2i \\ -(e^{it} - e^{-it})/2i & (e^{it} + e^{-it})/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

c/ $e^{At} = a_1 At + a_0 I$... maticová funkce je vyjádřena maticovým polynomem stupně $n-1 = 1$

$$e^{it} = a_1 it + a_0, \quad e^{-it} = -a_1 it + a_0 \quad \dots \text{přecházíme na funkce v proměnné } I_1, I_2$$

Řešením rovnic určíme parametry: $a_0 = \cos t$, $a_1 = \frac{\sin t}{t}$

$$e^{At} = a_1 At + a_0 I = \frac{\sin t}{t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} t + \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

1.6. Vlastnosti spojitých lineárních dynamických systémů

Vnitřní stabilita LDS (stabilita rovnovážného stavu x_r)

Definice:

Rovnovážný stav $x_r = 0$ neřízeného spojitého LDS

S: $\dot{x}(t) = Ax(t)$; $x(t) \in R^n$, $x_r = 0$, $t \in [t_0, \infty)$, $x(t_0) = x_0 \dots$ počáteční podmínky

je asymptoticky stabilní, jestliže $\forall x_0 \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

stabilní, jestliže $\forall x_0 \exists M(x_0) : \|x(t)\| \leq M(x_0), \forall t, t \in [t_0, \infty)$

a nestabilní, jestliže $\exists x_0 : \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$,

přičemž $\|x(t)\|$ označuje Eukleidovu normu vektoru stavu, $x(t)$ je řešení stavové rovnice.

Věta 1-2.: Neřízený spojitý LDS je asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow \operatorname{Re} I_i(A) < 0, \forall i, i = 1, \dots, n$

a nestabilní, jestliže existuje $I_i(A) : \operatorname{Re} I_i > 0$

Důkaz: $x(t) = e^{At} x(t_0) = Ve^{Dt}V^{-1}x(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i e^{I_i t} x_i(t_0)$ (řešení $x(t)$ je lineární kombinací módů systému)

Vnější stabilita LDS (BIBO stabilita, vstupně-výstupní stabilita)

Definice:

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

je vstupně-výstupně stabilní (BIBO stabilní), jestliže reaguje na omezený vstup omezeným výstupem:

$$\forall u(t), \forall t : |u(t)| < M_u \quad \exists M_y : |y(t)| < M_y$$

Věta 1-3:

Spojité lineární dynamický systém je BIBO stabilní $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$, kde $g(t)$ je impulsní funkce systému.

Důkaz: Vyplývá z konvolutorního integrálu $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t)u(t)dt$.

Poznámka: Pojem „stabilita ve smyslu Ljapunova“ bude zaveden a vysvětlen v 11. kapitole. Pokud hovoříme o stabilitě systému, máme obvykle na mysli vnitřní stabilitu.

Řiditelnost a dosažitelnost LDS

Základní úlohou řízení dynamických systémů je určení řízení $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, které způsobí změnu daného počátečního stavu systému $x(t_0)$ ve zvolený koncový stav $x(t_1)$. Lze-li takové řízení určit, obvykle existuje takových řízení více a mezi generovanými trajektoriemi $x(t)$ lze vybírat, což je základním principem úloh optimálního řízení. Jestliže cílový stav nebude dosažitelný, ztratí tyto úlohy smysl. Zavádí se proto pojmy **řiditelnost stavu**, kdy výchozím stavem je libovolný počáteční stav systému $x(t_0) \neq 0$ a koncovým stavem je počátek stavového prostoru $x(t_1) = 0$ a **dosažitelnost stavu**, kdy výchozím stavem je naopak počátek stavového prostoru $x(t_0) = 0$ a koncovým stavem je libovolný stav $x(t_1) \neq 0$. Jsou-li všechny stavy systému říditelné resp. dosažitelné, říkáme, že **systém je říditelný resp. dosažitelný**.

Dosažitelnost je silnější vlastnost než říditelnost, protože systém může přejít do nulového stavu i bez řízení a přitom nemusí být dosažitelný.

Definice:

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

je říditelný, jestliže $\forall x(t_0) \neq 0, x(t_0) \in R^n$, existuje řízení $u(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$, které způsobí změnu daného počátečního stavu systému $x(t_0)$ v koncový stav $x(t_1) = 0$.

Jinak řečeno, musí platit

$$x(t_1) \equiv 0 = e^{A(t_1-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-t)} bu(t) dt$$

Věta 1-4:

Spojité lineární dynamický systém je říditelný \Leftrightarrow hodnota matice říditelnosti Q_f je rovna dimenzi vektoru stavu $x(t)$:

$$h[Q_f] = h[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = \dim x(t) = n \quad (1.43)$$

Důkaz: Vyplývá z podmínek řešitelnosti stavové rovnice vzhledem k řízení $u(t)$ pro libovolné $x(t_0)$. Důkaz je jednoduchý pro diskrétní systémy, pro spojitě systémy jej neuvádíme.

Definice:

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

je **dosažitelný**, jestliže existuje řízení $u(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$, které způsobí změnu daného počátečního stavu systému $x(t_0) = 0$ v libovolný požadovaný koncový stav $x(t_1) \neq 0$.

Jinak řečeno, musí platit

$$x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-t)} bu(t) dt$$

Položíme-li $x(t_1) = -e^{A(t_1-t_0)} x(t_0)$, je zřejmá formální shoda podmínek říditelnosti a dosažitelnosti s tím, že říditelnost předpokládá existenci inverze stavové matice přechodu, což je u spojitého lineárního dynamického systému splněno.

Z uvedeného vyplývá, že **věta o říditelnosti platí i pro dosažitelnost spojitého LDS**.

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost LDS

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost souvisí s možností určit stav systému $x(t)$ na základě měření jeho vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ na konečném časovém intervalu. *Určujeme-li stav na začátku intervalu měření, jedná se o pozorovatelnost stavu, určujeme-li stav na konci intervalu měření, jedná se o rekonstruovatelnost stavu.* Jsou-li všechny stavy systému pozorovatelné resp. rekonstruovatelné, říkáme, že **systém je pozorovatelný resp. rekonstruovatelný**.

Definice:

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

je **pozorovatelný**, jestliže pozorováním vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$ lze určit počáteční stav systému $x(t_0)$.

Jinak řečeno, $\forall t$ musí platit

$$y(t) - c^T \int_{t_0}^t e^{A(t-t)} bu(t) dt = c^T e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

Poznámka: Protože vliv vstupu na výstup je známý (je určen druhým členem na levé straně) nebo může být i nulový, můžeme předchozí vztah zjednodušit:

$$\bar{y}(t) = c^T e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

Věta 1-5:

Spojité lineární dynamický systém je pozorovatelný \Leftrightarrow hodnota matice pozorovatelnosti Q_p je rovna dimenzi vektoru stavu $x(t)$:

$$h[Q_p] = h \begin{bmatrix} c^T & c^T A & \mathbf{L} & c^T A^{n-1} \end{bmatrix}^T = \dim x(t) = n \quad (1.44)$$

Důkaz: Vyplývá z podmínek řešitelnosti výstupní rovnice při známém vstupu $u(t)$ pro libovolné $x(t_0)$. Důkaz je jednoduchý pro diskrétní systémy, pro spojité systémy jej neuvádíme.

Definice rekonstruovatelnosti se liší pouze požadavkem na určení stavu $x(t_1)$ na konci intervalu měření a podobně jako u říditelnosti a dosažitelnosti LDS lze ukázat, že **věta o pozorovatelnosti platí i pro rekonstruovatelnost spojitého LDS**.

Řiditelnost a pozorovatelnost (dosažitelnost a rekonstruovatelnost) lze nejjednodušeji ilustrovat na systému n -tého řádu $S : (A, b, c^T)$ v „modální (Jordanově) stavové reprezentaci“, kdy vlastní čísla tvoří diagonálu matice dynamiky (viz odst. 1.5 a 1.7).

Pro reálná, různá vlastní čísla $I_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, má tato stavová reprezentace tvar

$$S: \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \mathbf{M} \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{L} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \mathbf{M} \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{M} \\ b_n \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [c_1 \quad \mathbf{L} \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \mathbf{M} \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Pro matice říditelnosti a pozorovatelnosti dostaneme

$$Q_r = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = \begin{bmatrix} b_1 & \mathbf{L} & I_1^{n-1}b_1 \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ b_n & \mathbf{L} & I_n^{n-1}b_n \end{bmatrix}; \quad Q_p = \begin{bmatrix} c^T \\ \mathbf{M} \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \mathbf{L} & c_n \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ c_1 I_1^{n-1} & \mathbf{L} & c_n I_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ze stavové rovnice vidíme, že pokud jsou všechny prvky b_i matice b nenulové, jsou všechny složky $x_i(t)$, a tedy i příslušné módy $e^{I_i t}$, $i = 1, \dots, n$, ovlivnitelné řízením $u(t)$.

Takový systém je říditelný a matice říditelnosti má hodnotu rovnající se dimenzi vektoru stavu. Bude-li libovolný z prvků b_i nulový, nebude příslušná složka vektoru stavu a příslušný mód říditelný a v matici říditelnosti bude odpovídající řádek nulový. Z toho vyplývá, že hodnota matice říditelnosti bude menší než dimenze vektoru stavu a systém nebude říditelný.

Analogický rozbor můžeme provést i pro pozorovatelnost systému.

Hodnota matice říditelnosti či pozorovatelnosti nezávisí na stavové reprezentaci popisující daný systém a to i v případě násobných vlastních čísel a systémů s více vstupy a více výstupy.

„Modální (Jordanova) stavová reprezentace“ byla zvolena pouze kvůli transparentnosti analýzy říditelnosti a pozorovatelnosti, která se v jiných ekvivalentních stavových reprezentacích ztrácí.

Poznámky:

1/ Pro testování říditelnosti LDS lze také použít kritérium

LDS je říditelný $\Leftrightarrow h[(I_i I - A), b] = \dim x(t) = n;$	$\forall I_i(A), i = 1, \dots, n$ (1.45)
---	--

a pro testování pozorovatelnosti kritérium

LDS je pozorovatelný $\Leftrightarrow h \begin{bmatrix} (I_i I - A) \\ c^T \end{bmatrix} = \dim x(t) = n;$	$\forall I_i(A), i = 1, \dots, n$ (1.46)
--	--

V případě, že hodnota matic bude pro nějaké vlastní číslo I_i menší než n , příslušný mód systému bude neříditelný nebo nepozorovatelný.

2/ Pro testování říditelnosti stabilních LDS lze použít **gramián říditelnosti** W_c a pro testování pozorovatelnosti stabilních LDS **gramián pozorovatelnosti** W_o :

Stabilní LDS je říditelný $\Leftrightarrow W_c = W_c^T > 0,$ kde $W_c = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A(t-t)} b b^T e^{A^T(t-t)} dt$	(1.47)
--	--------

Stabilní LDS je pozorovatelný $\Leftrightarrow W_o = W_o^T > 0,$ kde $W_o = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A^T(t-t)} c^T c e^{A(t-t)} dt$	(1.48)
--	--------

Poznamenejme, že symetrické matice $W_c, W_o > 0$ lze také získat řešením Ljapunovských rovnic (viz 11. kapitola) a že singulární čísla matic W_c, W_o lze použít pro vyjádření „míry říditelnosti či pozorovatelnosti“.

Určení matic W_c, W_o v Matlabu: `gram(sys,'c')`, `gram(sys,'o')`

Stabilizovatelnost a detekovatelnost LDS

Zavedení pojmů stabilizovatelnost a detekovatelnost vyplývá z principiální možnosti rozdělit systém na stabilní a nestabilní část a také na dosažitelnou a nedosažitelnou a na pozorovatelnou a nepozorovatelnou část.

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) ; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

stabilizovatelný, jestliže množina jeho nestabilních stavů je obsažena v podprostoru dosažitelných stavů a nedosažitelná část je stabilní.

$$\text{Jinak řečeno, LDS je stabilizovatelný, jestliže } \exists k^T : \operatorname{Re} I_i(A - bk^T) < 0, \quad \forall i, i = 1, \dots, n, \quad (1.49)$$

kde k^T je zisková matice zpětnovazebního lineárního stavového regulátoru $u(t) = -k^T x(t)$.

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) ; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

detekovatelný, jestliže množina jeho nestabilních stavů je obsažena v podprostoru pozorovatelných stavů a nepozorovatelná část je stabilní.

$$\text{Jinak řečeno, LDS je detekovatelný, jestliže } \exists h : \operatorname{Re} I_i(A - hc^T) < 0, \quad \forall i, i = 1, \dots, n, \quad (1.50)$$

kde h je zisková matice zpětnovazebního lineárního výstupního regulátoru $u(t) = -hy(t)$.

S problémem stabilizovatelnosti se setkáme např. při návrhu stavového regulátoru pro systém, který není říditelný (dosažitelný) a s problémem detekovatelnosti při návrhu rekonstruktoru stavu pro systém, který není pozorovatelný (rekonstruovatelný).

Dualita LDS

K lineárnímu dynamickému systému, jehož stavová reprezentace je charakterizovaná trojicí

$$S : (A, b, c^T), \text{ definujeme } \mathbf{duální systém} \text{ se stavovou reprezentací } {}^D S : (A^T, c, b^T).$$

V duálním systému je tedy zaměněna matice dynamiky za transponovanou matici dynamiky a je zaměněn vstup za výstup, resp. matice řízení za matici výstupu. Dualita se tak přenáší i na vlastnosti systémů. Např. říditelnost a pozorovatelnost jsou duální vlastnosti, jak je patrné z kritérií (1.43 – 1.48). Je-li systém říditelný, potom duální systém je pozorovatelný a naopak.

Kalmanova dekompozice LDS

Pro obecný lineární dynamický systém $S : (A, b, c^T)$ existuje taková báze stavového prostoru R^n ,

že vektor stavu $x(t)$ může být dekomponován na čtyři vzájemně se vylučující subvektory stavu

${}^1x(t), {}^2x(t), {}^3x(t), {}^4x(t)$, odpovídající dekompozici S na subsystémy ${}^1S, {}^2S, {}^3S, {}^4S$ s vlastnostmi:

1S : říditelný, ale nepozorovatelný subsystém (matice dynamiky A_{11})

2S : říditelný a pozorovatelný subsystém (matice dynamiky A_{22})

3S : neříditelný a nepozorovatelný subsystém (matice dynamiky A_{33})

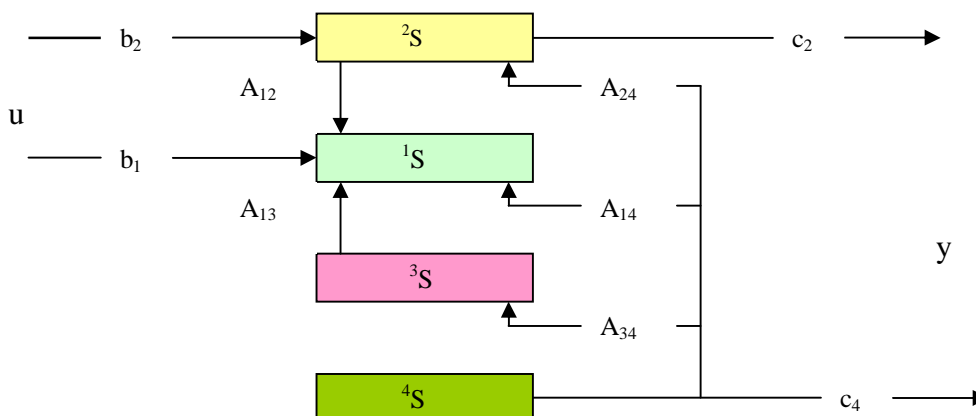
4S : neříditelný, ale pozorovatelný subsystém (matice dynamiky A_{44})

Taková dekompozice sice není jednoznačná, nemění se však dimenze jednotlivých subsystémů.

Uvažujme např. dekompozici

$$A \xrightarrow{\text{dek}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \quad b \xrightarrow{\text{dek}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^T \xrightarrow{\text{dek}} [0 \quad c_2 \quad 0 \quad c_4], \quad (1.51)$$

kteřá je znázorněna na zjednodušeném blokovém schéma



Poznámka: Je-li například daný systém $S : (A, b, c^T)$ říditelný ($h[Q_r] = \dim x(t) = n$), ale kromě pozorovatelné části má i nepozorovatelnou část ($1 \leq h[Q_p] < n$), je dekomponovatelný na subsystémy $^1S, ^2S$ a lze jej popsat stavovou reprezentací se strukturou

$$\begin{bmatrix} ^1\mathfrak{X}(t) \\ ^2\mathfrak{X}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^1x(t) \\ ^2x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^1x(t) \\ ^2x(t) \end{bmatrix}$$

Bude-li naopak daný systém $S : (A, b, c^T)$ pozorovatelný ($h[Q_p] = \dim x(t) = n$), ale kromě říditelné části má i neříditelnou část ($1 \leq h[Q_r] < n$), je dekomponovatelný na subsystémy 2S a 4S a lze jej popsat stavovou reprezentací se strukturou

$$\begin{bmatrix} ^2\mathfrak{X}(t) \\ ^4\mathfrak{X}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^2x(t) \\ ^4x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} c_2 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^2x(t) \\ ^4x(t) \end{bmatrix}$$

1.7. Vstupně – výstupní ekvivalence lineárních dynamických systémů

Předpokládejme, že pro reálný dynamický systém byl určen stavový model LDS

$$S: \mathfrak{X}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1, \quad (1.52)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad A, b, c^T \dots \text{známé matice}, \quad \{I_i(A)\}_{i=1}^n \dots \text{známá vlastní čísla}$$

Z hlediska *vnějšího* popisu LDS odpovídá této stavové reprezentaci jediná lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními parametry

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\mathfrak{X}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t); \quad m < n, \quad (1.53)$$

kde parametry a_0, a_1, \dots, a_{n-1} jsou koeficienty charakteristického polynomu matice A

$$a(I) = \det(II - A) = I^n + a_{n-1}I^{n-1} + \dots + a_1I + a_0 \quad (1.54)$$

Předpokládejme existenci $m = n - 1$ derivací vstupní veličiny. Potom parametry b_0, b_1, \dots, b_{n-1} , závislé na maticích A, b, c^T , určíme převodem stavové reprezentace na lineární diferenciální rovnici. Převod provedeme formální derivací výstupní rovnice a využijeme platnost

Cayley-Hamiltonovy věty: $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0 \quad (1.55)$

Postupnými derivacemi výstupní rovnice (a dosazením za $\mathfrak{X}(t)$ ze stavové rovnice) dostaneme

$$\begin{aligned} y(t) &= \dots = c^T x(t) && / a_0 \\ \mathfrak{X}(t) &= c^T \mathfrak{X}(t) = \dots = c^T Ax(t) + c^T bu(t) && / a_1 \\ \mathfrak{X}\mathfrak{X}(t) &= c^T A\mathfrak{X}(t) + c^T b\mathfrak{X}(t) = c^T A^2x(t) + c^T Abu(t) + c^T b\mathfrak{X}(t) && / a_2 \\ &\vdots \\ y^{(n)}(t) &= \dots = c^T A^n x(t) + c^T A^{n-1}bu(t) + \dots + c^T bu^{(n-1)}(t) && / a_n = 1 \end{aligned}$$

Provedeme naznačené násobení jednotlivých rovnic známými koeficienty charakteristického polynomu a_0, a_1, \dots, a_{n-1} a rovnice sečteme. Vzhledem k platnosti (1.55) dojde k vyloučení stavu $x(t)$ a po úpravě pravé strany dostáváme diferenciální rovnici (1.53) s explicitně definovanou závislostí parametrů b_0, b_1, \dots, b_{n-1} na maticích A, b, c^T :

$$y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \underbrace{c^T b}_{b_{n-1}} u^{(n-1)} + \dots + \underbrace{(a_1 c^T b + c^T A^{n-2} b)}_{b_1} u' + \underbrace{(a_0 c^T b + c^T A^{n-1} b)}_{b_0} u \quad (1.56)$$

Koeficienty diferenciální rovnice b_0, b_1, \dots, b_{n-1} jsou funkcemi známých koeficientů a_0, a_1, \dots, a_{n-1} charakteristického polynomu a **Markovských parametrů systému** M_i , definovaných vztahem

$$M_i = c^T A^{i-1} b, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.57)$$

Z rovnice (1.56) vyplývají dva důležité poznatky:

1/ Relativní řád systému (rozdíl řádu derivace výstupní a vstupní veličiny nebo rozdíl stupňů polynomu ve jmenovateli a čitateli přenosové funkce) je dán prvním nenulovým Markovským parametrem.

Je-li tedy např. $c^T b \neq 0$, je relativní řád 1, je-li prvním nenulovým Markovským parametrem $c^T A^{n-1} b \neq 0$, je relativní řád n .

Relativní řád je 0 v případě, že výstupní rovnice má tvar $y(t) = c^T x(t) + du(t)$.

2/ K dané stavové reprezentaci $S : (A, b, c^T)$ sice existuje jediná diferenciální rovnice (jediná přenosová funkce), ale stejnou diferenciální rovnici (stejnou přenosovou funkci) může realizovat i taková stavová reprezentace $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$, která splňuje

podmínky vstupně-výstupní ekvivalence:

$\det(II - A) = \det(II - \bar{A}) \quad \dots \dots$ rovnost charakteristických polynomů (vlastních čísel)

$c^T A^{i-1} b = \bar{c}^T \bar{A}^{i-1} \bar{b}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \dots \dots$ rovnost Markovských parametrů (1.58)

Protože určení nějaké ekvivalentní stavové reprezentace $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ k dané stavové reprezentaci $S : (A, b, c^T, d)$ může najít praktické uplatnění při modelování či analýze vlastností LDS, bude vhodné nalézt podmínky vstupně-výstupní ekvivalence stavových reprezentací (1.58) v nějaké konstruktivnější podobě.

Vzhledem k tomu, že ekvivalentní stavové reprezentace $S : (A, b, c^T, d), \bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ reagují na stejný vstup $u(t)$ stejným výstupem $y(t)$ a mají shodnou dimenzi vektoru stavu $\dim x(t) = \dim \bar{x}(t) = n$, lze předpokládat odlišný průběh stavových proměnných, a tedy existenci nějaké $n \times n$ regulární transformační matice T s konstantními prvky takové, že $\forall x(t)$ resp. $\forall \bar{x}(t)$

$$\bar{x}(t) = Tx(t) \quad \text{resp.} \quad x(t) = T^{-1}\bar{x}(t) \quad (1.59)$$

Dosažením transformačního vztahu $x(t) = T^{-1}\bar{x}(t)$ a jeho časové derivace $\dot{x}(t) = T^{-1}\dot{\bar{x}}(t)$ do stavové reprezentace $S : (A, b, c^T, d)$ dostaneme porovnáním s $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ **podmínky vstupně-výstupní ekvivalence** ve tvaru převodních vztahů mezi maticemi ekvivalentních stavových reprezentací.

$$\begin{array}{l}
 S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) \xleftarrow{x=T^{-1}\bar{x}, \dot{x}=T^{-1}\dot{\bar{x}}} \\
 y(t) = c^T x(t) + du(t) \\
 \downarrow \\
 \bar{S}: T^{-1}\dot{\bar{x}}(t) = AT^{-1}\bar{x}(t) + bu(t) \quad /T \quad \rightarrow \\
 y(t) = c^T T^{-1}\bar{x}(t) + du(t)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \bar{S}: \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{b}u(t), \quad \bar{x}(t_0) = Tx(t_0) \\
 y(t) = \bar{c}^T \bar{x}(t) + \bar{d}u(t) \\
 \mathbf{b} \\
 \bar{S}: \dot{\bar{x}}(t) = TAT^{-1}\bar{x}(t) + Tbu(t) \\
 y(t) = c^T T^{-1}\bar{x}(t) + du(t)
 \end{array}$$

Podmínky vstupně-výstupní ekvivalence, převodní vztahy mezi S a \bar{S} :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= TAT^{-1}, \quad \bar{b} = Tb, \quad \bar{c}^T = c^T T^{-1}, \quad \bar{d} = d \\ \text{resp. } A &= T^{-1}\bar{A}T, \quad b = T^{-1}\bar{b}, \quad c^T = \bar{c}^T T, \quad d = \bar{d} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Podmínky vstupně-výstupní ekvivalence (1.60) jsou ekvivalentní podmínkám (1.58):

- 1/ Transformace podobnosti $\bar{A} = TAT^{-1}$ zachovává vlastní čísla $\Rightarrow \det(II - A) = \det(II - \bar{A})$
 2/ Markovské parametry jsou pro ekvivalentní reprezentace shodné
 $c^T b = \bar{c}^T T T^{-1} \bar{b} = \bar{c}^T \bar{b}, \quad c^T A b = \bar{c}^T T T^{-1} \bar{A} T T^{-1} \bar{b} = \bar{c}^T \bar{A} \bar{b}, \dots, \dots, \quad c^T A^{n-1} b = \bar{c}^T \bar{A}^{n-1} \bar{b} \quad (1.61)$
 \Rightarrow vlastní čísla $I_i, i = 1, \dots, n$, i Markovské parametry jsou **vstupně-výstupními invarianty**.

Ekvivalentní stavové reprezentace $S:(A, b, c^T, d), \bar{S}:(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ zachovávají vlastnosti říditelnosti (1.43) a pozorovatelnosti (1.44):

Pro matice říditelnosti a pozorovatelnosti v ekvivalentní reprezentaci platí

$$\bar{Q}_r = [\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \bar{A}^2\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}] = [Tb, TAT^{-1}Tb, TAT^{-1}TAT^{-1}Tb, \dots] = T[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = TQ_r$$

$$\bar{Q}_p = \begin{bmatrix} \bar{c}^T \\ \bar{c}^T \bar{A} \\ \mathbf{M} \\ \bar{c}^T \bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T T^{-1} \\ c^T T^{-1} T A T^{-1} \\ \mathbf{M} \\ c^T A^{n-1} T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \mathbf{M} \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} T^{-1} = Q_p T^{-1} \quad (1.62)$$

Protože násobením regulární maticí T resp. T^{-1} se nezmění hodnost Q_r resp. Q_p , platí

$$h[\bar{Q}_r] = h[Q_r] = \dim \bar{x}(t) = \dim x(t) = n \quad \text{resp.} \quad h[\bar{Q}_p] = h[Q_p] = \dim \bar{x}(t) = \dim x(t) = n.$$

Ze vztahů (1.62) také vyplývá, že dva ekvivalentní říditelné a pozorovatelné systémy S a \bar{S} jsou vázány regulární transformační maticí T_{nm} (1.59), kterou lze určit ze vztahu

$$T = \bar{Q}_r Q_r^{-1} \quad \text{nebo} \quad T = \bar{Q}_p^{-1} Q_p \quad (1.63)$$

Vztahy (1.63) využíváme při transformaci dané říditelné a pozorovatelné stavové reprezentace $S:(A, b, c^T, d)$ do libovolně zvolené ekvivalentní říditelné a pozorovatelné stavové reprezentace $\bar{S}:(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ pro výpočet parametrů matice řízení resp. výstupu $\bar{b} = Tb$ resp. $\bar{c}^T = c^T T^{-1}$ (z rovnosti Markovských parametrů vyplývá, že parametry jedné z matic jsou volitelné).

Příklad 1.4:

K danému říditelnému a pozorovatelnému systému $S(A, b, c^T)$

$$S: \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

určete matice modelu vstupně-výstupní ekvivalentní stavové reprezentace $\bar{S}(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$, zadané specifikovanou strukturou s částečně neurčenými parametry (matice řízení je zvolena a respektuje požadavek říditelnosti)

$$\bar{S}: \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ -\bar{a}_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_0) \\ \bar{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Určete hodnoty transformovaných počátečních podmínek.

Řešení:

1/ Parametry matice \bar{A} určíme z podmínky rovnosti charakteristických polynomů (1.58):

$$\det(I - A) = \det(I - \bar{A}) \Rightarrow (I + 4)(I + 2) - 4 = (I - \bar{a}_{11})I + \bar{a}_{12}^2 \Rightarrow \bar{a}_{11} = -6, \bar{a}_{12} = 2$$

2/ Určíme matice říditelnosti pro obě stavové reprezentace a transformační matice T, T^{-1} (1.63):

$$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_f = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad h[Q_f] = h[\bar{Q}_f] = \dim x(t) = \dim \bar{x}(t) = n = 2$$

$$T = \bar{Q}_f Q_f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

3/ Transformační matice T, T^{-1} použijeme pro určení počátečních podmínek a matice výstupu

$$\bar{x}(t_0) = T x(t_0) \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_0) \\ \bar{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{c}^T = c^T T^{-1} = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = [3 \quad -8]$$

Ekvivalentní systém $\bar{S}(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$ je plně určen a bude vykazovat stejnou odezvu na výstupu pro libovolný vstupní signál jako daný systém $S(A, b, c^T)$:

$$\bar{S}: \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_0) \\ \bar{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = [3 \quad -8] \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

1.8. Normální formy stavové reprezentace LDS

V předchozím jsme ukázali, že lze určit nekonečně mnoho vstupně-výstupních ekvivalentních stavových reprezentací $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ k dané stavové reprezentaci $S : (A, b, c^T, d)$.

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1 \quad (1.64)$$
$$y(t) = c^T x(t) + du(t) \quad I_i(A), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{vlastní čísla matice } A)$$

Ekvivalentní reprezentace lze využít při modelování, ale i v takových úlohách analýzy či syntézy LDS, které jsou transparentnější a snáze řešitelné v nějaké jiné, vhodně zvolené ekvivalentní stavové reprezentaci. Stavové reprezentace, které vystihují některé význačné vlastnosti LDS a obsahují minimální počet parametrů pro popis systému nazýváme "normální formy".

Zabývejme se nyní formálním převodem systému $S : (A, b, c^T, d)$ do obvykle používaných normálních forem $\bar{S}_x : (\bar{A}_x, \bar{b}_x, \bar{c}_x^T, \bar{d}_x)$ a věnujme pozornost jejich struktuře.

Jordanova normální forma $\bar{S}_j : (\bar{A}_j, \bar{b}_j, \bar{c}_j^T, \bar{d}_j)$

Tato reprezentace, nazývaná též modální reprezentace, má na diagonále \bar{A}_j vlastní čísla $I_i(A)$, $i = 1, \dots, n$ a nenulové prvky matice řízení a výstupu přímo indikují říditelnost a pozorovatelnost.

Do této reprezentace může být převeden každý systém $S : (A, b, c^T, d)$ s použitím transformace ekvivalence $\bar{x}(t) = Tx(t) = V^{-1}x(t)$, kde V je "modální transformační matice" (její sloupce tvoří vlastní vektory matice A).

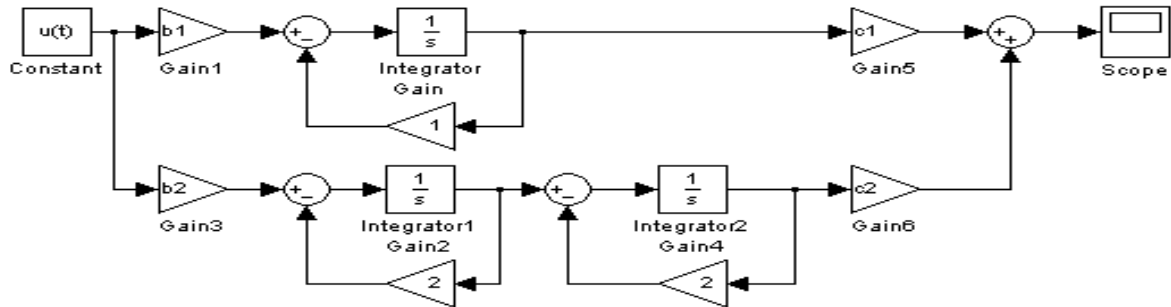
Viz Matlab: eig(A), Jordan(A)

$$\bar{S}_j: \dot{\bar{x}}(t) = V^{-1}AV \bar{x}(t) + V^{-1}bu(t), \quad \text{kde } \bar{A}_j = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{L} & I_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_j = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \mathbf{M} \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}$$
$$y(t) = c^T V \bar{x}(t) + \bar{d}_j u(t) \quad \bar{c}_j^T = [\bar{c}_1 \quad \mathbf{L} \quad \bar{c}_n], \quad \bar{d}_j = d \quad (1.65)$$

Poznámka: V případě k -násobného I_i bude mít \bar{A}_j na diagonále ještě $k \times k$ Jordanovu klec J_i .

Tato normální forma odpovídá rozkladu přenosové funkce na parciální zlomky, má však význam především teoretický, protože při tvorbě analogového modelu se musíme omezit na reálná vlastní čísla (možnost nastavení koeficientů modelu). Analogový model při reálných, nenásobných vlastních číslech je vytvořen paralelním spojením subsystémů 1. řádu, v případě k -násobného I_i je v i -té paralelní větvi k subsystémů v sériovém spojení. Poznamenejme, že při volbě parametrů $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \dots = \bar{c}_n = 1$ mají parametry $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ význam reziduí.

Analogové schéma (LDS 3.řádu, $I_1 = -1$, $I_2 = I_3 = -2$, parametry jsou bez proužků)



Normální forma říditelnosti $\bar{S}_r : (\bar{A}_r, \bar{b}_r, \bar{c}_r^T, \bar{d}_r)$

1/ V této reprezentaci obsahuje matice dynamiky \bar{A}_r parametry, které odpovídají koeficientům charakteristického polynomu matice A : $\det(II - A) = I^n + a_{n-1}I^{n-1} + \dots + a_1I + a_0$

2/ Matice říditelnosti je v této reprezentaci identickou maticí

$$\bar{Q}_r = [\bar{b}_r, \bar{A}_r \bar{b}_r, \bar{A}_r^2 \bar{b}_r, \dots, \bar{A}_r^{n-1} \bar{b}_r] = I$$

Struktura matic stavového modelu:

$$\bar{S}_r : \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_r \bar{x}(t) + \bar{b}_r u(t), \quad \text{kde } \bar{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{L} & -a_0 \\ 1 & 0 & \mathbf{L} & -a_1 \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \end{bmatrix}$$

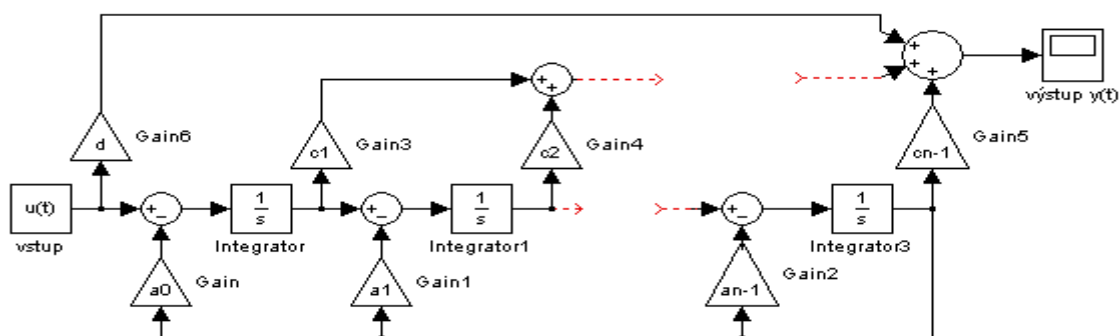
$$y(t) = \bar{c}_r^T \bar{x}(t) + \bar{d}_r u(t) \quad \bar{c}_r^T = [\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \mathbf{L} \quad \bar{c}_n], \quad \bar{d}_r = d \quad (1.66)$$

Parametry $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ jsou obecné parametry.

Do této struktury lze transformovat jakýkoliv říditelný systém $S : (A, b, c^T, d)$, přičemž transformační matici T určíme ze vztahu (1.63) při respektování $\bar{Q}_r = I$:

$$T = \bar{Q}_r Q_r^{-1} = Q_r^{-1}, \quad T^{-1} = Q_r \quad (1.67)$$

Analogové schéma (parametry jsou bez proužků, místo c_{n-1} má být c_n !)



Normální forma pozorovatelnosti $\bar{S}_p : (\bar{A}_p, \bar{b}_p, \bar{c}_p^T, \bar{d}_p)$

- 1/ Reprezentace je duální vzhledem k normální formě říditelnosti, matice dynamiky \bar{A}_p opět obsahuje parametry, které odpovídají koeficientům charakteristického polynomu matice A :
 $\det(II - A) = I^n + a_{n-1}I^{n-1} + \dots + a_1I + a_0$

- 2/ Matice pozorovatelnosti je v této reprezentaci identickou maticí

$$\bar{Q}_p = \begin{bmatrix} \bar{c}_p^T & \bar{c}_p^T \bar{A}_p & \mathbf{L} & \bar{c}_p^T \bar{A}_p^{n-1} \end{bmatrix}^T = I$$

Struktura matic stavového modelu:

$$\bar{S}_p : \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_p \bar{x}(t) + \bar{b}_p u(t), \\ y(t) = \bar{c}_p^T \bar{x}(t) + \bar{d}_p u(t) \end{cases} \quad \text{kde} \quad \bar{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{M} & & & \mathbf{M} \\ -a_0 & -a_1 & \mathbf{L} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_p = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \mathbf{M} \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}$$

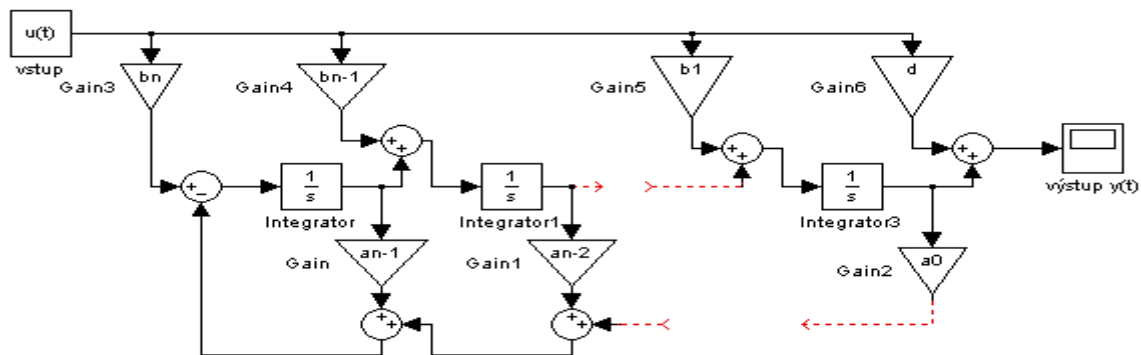
$$y(t) = \bar{c}_p^T \bar{x}(t) + \bar{d}_p u(t) \quad \bar{c}_p^T = [1 \ 0 \ \mathbf{L} \ 0], \quad \bar{d}_p = d \quad (1.68)$$

Parametry $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ jsou obecné parametry (všimněme si, že u modelu generátoru externího signálu by tyto parametry mohly zastupovat jeho počáteční podmínky).

Do této struktury lze transformovat jakýkoliv pozorovatelný systém $S : (A, b, c^T, d)$, přičemž transformační matici T určíme ze vztahu (1.63) při respektování $\bar{Q}_p = I$:

$$T = Q_p, \quad T^{-1} = Q_p^{-1} \quad (1.69)$$

Analogové schéma (parametry jsou bez proužků)



Frobeniova stavová reprezentace $\bar{S}_F : (\bar{A}_F, \bar{b}_F, \bar{c}_F^T, \bar{d}_F)$

Tato reprezentace je velmi často používaná z důvodu jednoduchého přechodu mezi vnějším a vnitřním popisem LDS v případech, kdy relativní řád systému je větší nebo roven 1.

- 1/ Matice dynamiky \bar{A}_F je shodná s maticí dynamiky \bar{A}_p normální formy pozorovatelnosti a obsahuje opět parametry, které odpovídají koeficientům charakteristického polynomu matice A :
 $\det(II - A) = I^n + a_{n-1}I^{n-1} + \dots + a_1I + a_0$

- 2/ Nedochozí-li u LDS k přímému ovlivnění výstupu $y(t)$ vstupem $u(t)$, t.zn., že ve výstupní rovnici stavové reprezentace je $\bar{d}_F = d = 0$ (relativní řád systému je větší nebo roven 1), potom lze dokázat, že koeficienty matice $\bar{c}_F^T = [\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \mathbf{L} \ \bar{c}_n]$ se rovnají přímo koeficientům na pravé straně odpovídající diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t); \quad m < n,$$

(při $m = n - 1$: $\bar{c}_1 = b_0, \bar{c}_2 = b_1, \dots, \bar{c}_n = b_{n-1}$)

a tedy i koeficientům polynomu v čitateli odpovídající přenosové funkce.

Struktura matic stavového modelu:

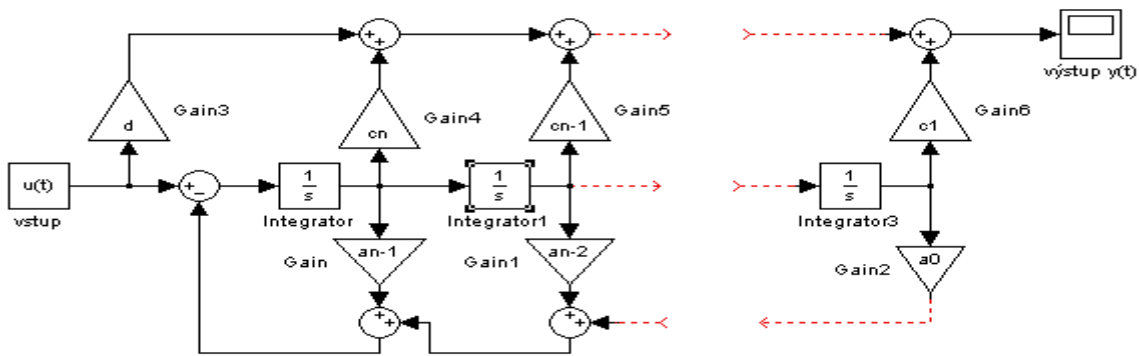
$$\bar{S}_F : \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_F \bar{x}(t) + \bar{b}_F u(t), \quad \text{kde} \quad \bar{A}_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{M} & & & \mathbf{M} \\ -a_0 & -a_1 & \mathbf{L} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \bar{c}_F^T \bar{x}(T) + \bar{d}_F u(t) \quad \bar{c}_F^T = [\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \mathbf{L} \quad \bar{c}_n], \quad \bar{d}_F = d \quad (1.70)$$

Do této struktury lze transformovat jakýkoliv říditelný systém $S:(A, b, c^T, d)$, přičemž transformační matici T určíme ze vztahu (1.63):

$$T = \bar{Q}_r \bar{Q}_r^{-1}, \quad T^{-1} = \bar{Q}_r \bar{Q}_r^{-1} \quad (1.71)$$

Analogové schéma (parametry jsou bez proužků)



Příklad 1.5.:

LDS je popsán diferenciální rovnicí $\dot{x}(t) + 0.4x(t) + 0.25y(t) = \dot{x}(t) + 2u(t)$.

$$\text{(odpovídající přenosová funkce je } F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p^2+0.4p+0.25}\text{).}$$

Určete jeho stavový popis ve Frobeniově stavové reprezentaci a v normální formě říditelnosti a pozorovatelnosti.

Řešení:

Relativní řád systému je 1, a proto koeficienty diferenciální rovnice přímo vystupují ve Frobeniově normální formě

$$S_F : \dot{x}(t) = A_F x(t) + b_F u(t), \quad \text{kde} \quad A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad b_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_F^T = [2 \quad 1]$$

$$y(t) = c_F^T x(t)$$

K Frobeniově formě určíme ekvivalentní **normální formu říditelnosti**

$$\bar{S}_F : \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_F \bar{x}(t) + \bar{b}_F u(t), \quad \text{kde} \quad \bar{A}_F = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ 1 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_F^T = [c_1 \quad c_2] = ?$$

$$y(t) = \bar{c}_F^T \bar{x}(t)$$

Do této struktury lze transformovat říditelný systém S_F transformační maticí $T = \bar{Q}_r^{-1}, T^{-1} = \bar{Q}_r$ (viz 1.67).

$$\text{Matici } \bar{c}_F^T = [c_1 \quad c_2] \text{ vypočteme ze vztahu } \bar{c}_F^T = c_F^T T^{-1} = c_F^T \bar{Q}_r = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.4 \end{bmatrix} = [1 \quad 1.6].$$

Normální forma pozorovatelnosti \bar{S}_p je duální k normální formě říditelnosti \bar{S}_F :

$$\bar{A}_p = \bar{A}_F^T, \quad \bar{b}_p = \bar{c}_F, \quad \bar{c}_p^T = \bar{b}_F^T.$$

2. PŘENOSOVÁ FUNKCE SPOJITÝCH LDS

Pro zavedení pojmu přenosová funkce (přenos) spojitého lineárního dynamického systému budeme potřebovat určité znalosti z Laplaceovy transformace.

2.1. Laplaceova transformace

Jestliže nějaká funkce času $f(t)$ vyhovuje podmínkám:

- $f(t)$ je jednoznačná a po úsecích hladká v každém konečném časovém intervalu
- $f(t) = 0$ pro $t < 0$
- $f(t)$ je exponenciálního řádu : $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-s_0 t} dt < \infty$ pro nějaké $s_0 > 0$,

potom Laplaceova transformace $f(t)$, formálně značená $F(p) = L\{f(t)\}$, je definovaná

$$F(p) = L \left\{ \begin{matrix} \text{obraz} \\ f(t) \\ \text{originál} \end{matrix} \right\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad \text{kde } p \text{ je komplexní proměnná, } p = s + j\omega \quad (2.1)$$

a existuje $\forall p$ taková, že $\text{Re } p > s_0$.

Zpětná Laplaceova transformace $F(p)$, formálně značená $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$, je definovaná

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \begin{matrix} \text{originál} \\ F(p) \\ \text{obraz} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_G F(p) e^{pt} dp = \sum_i \text{res } F(p_i) e^{p_i t}, \quad (\text{Cauchyho věta}) \quad (2.2)$$

kde $\text{res } F(p_i)$ označuje residuum $F(p_i)$ - hodnotu funkce komplexní proměnné v pólu p_i .

Základní pravidla L- transformace

1/ $L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$ (linearita - homogenita , aditivita)

$L^{-1}\{a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)\} = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$

2/ $L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0^+)$ (obraz časové derivace funkce)

$L\{f^{(k)}(t)\} = p^k F(p) - \sum_{i=0}^{k-1} p^{k-1-i} f^{(i)}(0^+)$ (obraz k-té časové derivace funkce)

3/ $L\left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{p} F(p)$ (obraz integrálu funkce)

4/ $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ (limitní věta o počáteční hodnotě)

5/ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$ (limitní věta o konečné hodnotě, existuje-li)

6/ $L\left\{ f\left(\frac{t}{a}\right) \right\} = aF(ap), a > 0$ (obraz funkce při změně časového měřítka)

7/ $L\{f(t-t)\} = e^{-pt} F(p)$ (obraz časově posunuté funkce, dopravní zpoždění)

8/ $L\{e^{-at} f(t)\} = F(p+a)$ (obraz exponenciálně tlumené funkce)

9/ $L\{t^k f(t)\} = (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} F(p)$ (obraz funkce násobené mocninou času)

10/ $L\left\{ \int_0^{\infty} f_1(t) f_2(t-t) dt \right\} = F_1(p) F_2(p)$ (obraz konvoluce časových funkcí)

$$L^{-1}\{F_1(p)F_2(p)\} = \int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t-t)dt$$

11/ $L\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_G F_1(q)F_2(p-q)dq \dots\dots\dots$ (obraz součinu časových funkcí, p,q komplexní proměnné, křivka G obepíná všechny póly)

Jednoduché příklady:

a/ $L\{1[t]\} = \int_0^{\infty} 1[t]e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} [e^{-pt}]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$

b/ $L\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = -\frac{1}{p+a} [e^{-(p+a)t}]_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}$

c/ $L\left\{\frac{d}{dt} e^{-t}\right\} = p \frac{1}{p+1} - \lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = \frac{p}{p+1} - 1 = -\frac{1}{p+1}$ (obraz časové derivace funkce, pravidlo č.2)

d/ $L\{\sin wt\} = L\left\{\frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} [e^{-(p-jw)t} - e^{-(p+jw)t}] dt = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-jw} - \frac{1}{p+jw} \right) = \frac{w}{p^2 + w^2}$

e/ $L^{-1}\left\{\frac{2}{p+1} - \frac{4}{p+3}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{p+3}\right\} = 2e^{-t} - 4e^{-3t}$

f/ Určete $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ a $\lim_{t \rightarrow 0} y(t)$, je-li dáno $Y(p) = \frac{p+1}{p+2} \frac{1}{p}$!

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p+1}{p+2} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{p+1}{p+2} \frac{1}{p} = 1$$

2.2. Přenosová funkce, základní pojmy, rozklad na parciální zlomky

Přenosová funkce $F(p)$, podobně jako lineární diferenciální rovnice s konstantními parametry, jsou parametrickými *modely vnějšího popisu* spojitých lineárních t-invariantních dynamických systémů a nezávisí tedy na vnitřních proměnných systému, resp. na stavové reprezentaci LDS.

Přenosová funkce $F(p)$ spojitého LDS je funkcí komplexní proměnné p a je definována s použitím Laplaceovy transformace časových funkcí jako poměr Laplaceových obrazů výstupní veličiny $Y(p)$ a vstupní veličiny $U(p)$ při nulových počátečních podmínkách (n.p.p.):

$$F(p) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} \Big|_{n.p.p.} = \frac{Y(p)}{U(p)} \tag{2.3}$$

Pro zavedení přenosové funkce existují v podstatě dva racionální důvody:

- a/ Laplaceovou transformací časových funkcí dostáváme funkce komplexní proměnné, diferenciální rovnice přecházejí na jednodušší polynomiální rovnice a dostáváme se tak z časové oblasti do algebraické. Problémy analýzy a syntézy lze často snáze vyřešit v algebraické oblasti a řešení v časové oblasti lze získat zpětnou Laplaceovou transformací.
- b/ Za předpokladu *informačních vazeb* mezi subsystemy lze pomocí jednoduchých pravidel tzv. „algebry blokových schémat“ snadno zjednodušit přenosové funkce složitých systémů a naopak, vytvářet přenosové funkce složitých systémů z přenosových funkcí subsystemů.

Ze stavového modelu LDS lze určit $F(p)$ aplikací L -transformace na stavovou a výstupní rovnici a vyloučením Laplaceova obrazu stavové proměnné $X(p)$ z obou rovnic.

Z lineární diferenciální rovnice lze určit $F(p)$ přímou aplikací L -transformace.

Přenosovou funkci definujeme při nulových počátečních podmínkách systému z důvodu jednoznačnosti přiřazení vstupní a výstupní veličiny.

Určení přenosové funkce z daného stavového modelu

Jak již jsme uvedli na začátku 2. kapitoly, z daného stavového modelu LDS

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); & x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1 \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

lze určit přenosovou funkci $F(p)$ aplikací L -transformace na stavovou a výstupní rovnici a vyloučením Laplaceova obrazu stavové proměnné $X(p)$ z obou rovnic, při respektování nulových počátečních podmínek.

L -transformací stavové a výstupní rovnice dostaneme

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + bU(p), \quad Y(p) = c^T X(p) + dU(p)$$

Upravíme stavovou rovnici a vyjádříme $X(p)$

$$(pI - A)X(p) = x_0 + bU(p) \Rightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}x_0 + (pI - A)^{-1}bU(p)$$

Po dosazení za $X(p)$ do výstupní rovnice dostáváme

$$Y(p) = c^T (pI - A)^{-1}x_0 + c^T (pI - A)^{-1}bU(p) + dU(p)$$

a při nulových počátečních podmínkách určíme přenosovou funkci jako polynomiální zlomek

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \Big|_{n.p.p.} = c^T (pI - A)^{-1}b + d = \frac{c^T (pI - A)^{Adj} b}{\det(pI - A)} + d = \frac{b(p)}{a(p)} \quad (2.5)$$

$$a(p) = \det(pI - A) \dots \text{charakteristický polynom, st } a(p) = n$$

$$b(p) = c^T (pI - A)^{Adj} b + d \det(pI - A) \dots \text{polynom v čitateli přenosu}$$

Pro $d = 0$ je $\text{st } b(p) < \text{st } a(p) \rightarrow$ **striktně ryzí přenosová funkce** (relativní řád ≥ 1)

Pro $d \neq 0$ je $\text{st } b(p) = \text{st } a(p) = n \rightarrow$ **ryzí přenosová funkce** (relativní řád = 0)

Poznámka: V případě, že stavový model bude popisovat LDS s více vstupy a více výstupy (vícezměrový systém, MIMO systém), dostaneme z (2.5) **matici přenosových funkcí**.

Určení přenosové funkce z dané diferenciální rovnice

Předpokládejme, že spojité LDS je popsán lineární diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t); \quad m \leq n \quad (2.6)$$

a předpokládejme nulové počáteční podmínky. Použitím L -transformaci dostaneme

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0)U(p) \quad (2.7)$$

a odtud přenosovou funkci

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \Big|_{n.p.p.} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{b(p)}{a(p)}; \quad m \leq n \quad (2.8)$$

Formy zápisu přenosové funkce, základní pojmy

Obecný tvar přenosové funkce je polynomiální zlomek

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad m \leq n \quad (2.9)$$

kde kořeny polynomu $b(p)$ v čitateli přenosu označujeme jako **nuly přenosu** $n_j, j = 1, \dots, m$

a kořeny polynomu $a(p)$ ve jmenovateli přenosu označujeme jako **póly přenosu** $p_i, i = 1, \dots, n$.

Přenosovou funkci (2.9) lze zapsat ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m (p - n_1)(p - n_2) \dots (p - n_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = \frac{b_m \prod_{j=1}^m (p - n_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad m \leq n \quad (2.10)$$

Póly i nuly v přenosové funkci mohou být **reálné, ryze imaginární či komplexně sdružené** a také **jednoduché** či **násobné**.

Pokud jsou reálné části pólů resp. nul záporné, jedná se o **stabilní póly** resp. **stabilní nuly**. Jestliže přenosová funkce má reálné stabilní póly a nuly, definujeme jejich záporně vzaté

převrácené hodnoty jako **časové konstanty** $T_i = -\frac{1}{p_i}$, $i = 1, \dots, n$; $t_j = -\frac{1}{n_j}$, $j = 1, \dots, m$

a přenosovou funkci (2.9) lze zapsat ve tvaru

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 (t_1 p + 1)(t_2 p + 1) \dots (t_m p + 1)}{a_0 (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1)} = \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (t_j p + 1)}{a_0 \prod_{i=1}^n (T_i p + 1)} = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad m \leq n \quad (2.11)$$

kde podíl koeficientů b_0 / a_0 představuje tzv. **statické zesílení** systému (viz 3. kapitola).

Poznámka: Počet pólů s nulovou hodnotou v přenosové funkci určuje tzv. **stupeň astaticismu** (počet integrátorů).

Příklad 2.1.: LDS je popsán přenosovou funkcí $F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3p^2 + 15p + 18}{2p^3 + 20p^2 + 58p + 40}$, která má nuly: -2, -3 a póly: -1, -4, -5. Vyjádřete přenosovou funkci pomocí nul a pólů a pomocí časových konstant.

Řešení:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3}{2} \frac{(p+2)(p+3)}{(p+1)(p+4)(p+5)}, \quad F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{18}{40} \frac{(0.5p+1)(0.33p+1)}{(p+1)(0.25p+1)(0.2p+1)}$$

Statické zesílení $K = 18/40$.

Rozklad racionální polynomiální funkce na parciální zlomky

Přenosová funkce $F(p)$ je z matematického hlediska racionální polynomiální funkce, zkráceně polynomiální zlomek. Polynomiálním zlomkem je ale také např. Laplaceův obraz $Y(p)$ výstupní odezvy $y(t)$ systému na známý vstupní signál $u(t)$, protože Laplaceův obraz $U(p) = L\{u(t)\}$ je obecně rovněž polynomiálním zlomkem a $Y(p) = F(p)U(p)$.

Chceme-li určit pro složitější polynomiální zlomky zpětnou Laplaceovou transformací časový originál $y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}$ nebo $g(t) = L^{-1}\{F(p)\}$, ($g(t)$ označuje impulsní funkci systému – viz 3. kapitola), lze úlohu zjednodušit **rozkladem polynomiálního zlomku na parciální zlomky**, ke kterým lze již snadno určit časové originály.

Rozklad na parciální zlomky budeme demonstrovat na rozkladu přenosové funkce $F(p)$.

Principiálně mohou nastat 3 případy:

I/ Nenásobné reálné póly $F(p)$

Rozklad $F(p)$:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{b(p)}{\prod_{i=1}^n p - p_i} = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} + \dots + \frac{r_n}{p - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{p - p_i} \quad (2.12)$$

kde r_i jsou residua $F(p)$ v pólech p_i , $i = 1, \dots, n$.

Výpočet residuí:

$$F(p)(p - p_i) = \frac{r_1(p - p_i)}{p - p_1} + \frac{r_2(p - p_i)}{p - p_2} + \dots + \frac{r_i(p - p_i)}{p - p_i} + \dots + \frac{r_n(p - p_i)}{p - p_n} \Rightarrow$$

$$r_i = \lim_{p \rightarrow p_i} [F(p)(p - p_i)], \quad i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

Zpětná Laplaceova transformace $F(p)$ - určení časového originálu (impulsní funkce $g(t)$):

$$g(t) = L^{-1}\{F(p)\} = L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{p - p_i}\right\} = \sum_{i=1}^n L^{-1}\left\{\frac{r_i}{p - p_i}\right\} = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t} \quad (2.14)$$

2/ Násobné póly $F(p)$

Uvažujme pro jednoduchost pouze k -násobný pól p_1 .

Rozklad $F(p)$:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{b(p)}{(p - p_1)^k} = \frac{{}^1 r_1}{p - p_1} + \frac{{}^2 r_1}{(p - p_1)^2} + \dots + \frac{{}^k r_1}{(p - p_1)^k} = \sum_{j=1}^k \frac{{}^j r_1}{(p - p_1)^j} \quad (2.15)$$

Výpočet residua ${}^j r_1$ (j -té residuum k -násobného pólu p_1):

$${}^j r_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \left\{ \frac{1}{(k - j)!} \frac{d^{k-j}}{dp^{k-j}} [F(p)(p - p_1)^k] \right\}, \quad j = 1, \dots, k \quad (2.16)$$

Zpětná Laplaceova transformace $F(p)$ - určení časového originálu (impulsní funkce $g(t)$):

$$g(t) = L^{-1}\{F(p)\} = L^{-1}\left\{\sum_{j=1}^k \frac{{}^j r_1}{(p - p_1)^j}\right\} = \sum_{j=1}^k L^{-1}\left\{\frac{{}^j r_1}{(p - p_1)^j}\right\} = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \frac{{}^j r_1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_1 t} \quad (2.17)$$

Důkaz: (pravidlo č.9)

$$L\{t^k f(t)\} = (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} F(p) \Rightarrow L\{t^k e^{p_1 t}\} = (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} \left(\frac{1}{p - p_1} \right) = (-1)^k \frac{k!}{(p - p_1)^{k+1}}$$

Po substituci $k = j - 1$ dostaneme $L\{t^{j-1} e^{p_1 t}\} = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{(p - p_1)^j}$ a po zpětné transformaci a úpravě (2.17).

3/ Komplexně sdružené póly $F(p)$

Uvažujme pro jednoduchost pouze jednu dvojici komplexně sdružených pólů $p_{1,2} = a \pm jb$

Rozklad $F(p)$:

$$F(p) = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{b(p)}{(p - a - jb)(p - a + jb)} = \frac{r_1}{p - a - jb} + \frac{r_2}{p - a + jb} = \sum_{i=1}^2 \frac{r_i}{p - p_i} \quad (2.18)$$

kde residua jsou rovněž komplexně sdružená čísla $r_{1,2} = g \pm jr$.

Výpočet residuí (stejný jako u případu ad1/):

$$r_i = \lim_{p \rightarrow p_i} [F(p)(p - p_i)], \quad i = 1, 2 \quad (2.19)$$

Zpětná Laplaceova transformace $F(p)$ - určení časového originálu (impulsní funkce $g(t)$):

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\{F(p)\} = \sum_{i=1}^2 L^{-1}\left\{\frac{r_i}{p - p_i}\right\} = \sum_{i=1}^2 r_i e^{p_i t} = (g + jr)e^{(a+jb)t} + (g - jr)e^{(a-jb)t} = \\ &= e^{at} \left[g(e^{jbt} + e^{-jbt}) + jr(e^{jbt} - e^{-jbt}) \right] = 2e^{at} [g \cos bt - r \sin bt] = \\ &= 2\sqrt{g^2 + r^2} e^{at} [\cos bt \cos j - \sin bt \sin j] = 2\sqrt{g^2 + r^2} e^{at} \cos(bt + j) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Poznámka: V předchozím vztahu jsme provedli úpravu, která převádí residuum (komplexní číslo) na polární tvar.

Reálná a imaginární část je potom dána vztahy $g = \sqrt{g^2 + r^2} \cos j$, $r = \sqrt{g^2 + r^2} \sin j$, $j = \arctg \frac{r}{g}$.

V obecném případě může polynomiální zlomek obsahovat libovolnou kombinaci pólů a je tedy nutné provést kombinaci rozkladů, výpočtu residuí a zpětných transformací.

Příklad 2.2: Určete zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce (impulsní funkci $g(t)$)

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{7p^2 + 18p + 15}{p^3 + 5p^2 + 11p + 15}, \quad \text{póly } p_i: -3, -1 \pm j2 \quad (a \pm jb)$$

Řešení:

$F(p)$ nemá násobné póly, a proto provedeme jednoduchý rozklad na parciální zlomky:

$$F(p) = \frac{7p^2 + 18p + 15}{(p+3)(p+1-j2)(p+1+j2)} = \frac{r_1}{p+3} + \frac{r_2}{p+1-j2} + \frac{r_3}{p-1+j2} = \sum_{i=1}^3 \frac{r_i}{p-p_i}$$

Residua vypočteme ze vztahu $r_i = \lim_{p \rightarrow p_i} [F(p)(p - p_i)]$, $i = 1, 2, 3$:

$$r_1 = 3, \quad r_{2,3} = g \pm jr = 2 \pm j1 \quad (\text{viz Matlab: residue})$$

Dosadíme do rozkladu:

$$F(p) = \frac{7p^2 + 18p + 15}{(p+3)(p+1-j2)(p+1+j2)} = \frac{3}{p+3} + \frac{2+j}{p+1-j2} + \frac{2-j}{p-1+j2}$$

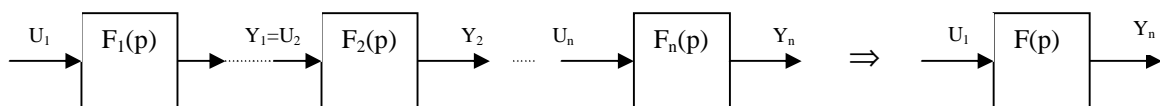
Zpětná transformace:

$$g(t) = L^{-1}\{F(p)\} = 3e^{-3t} + 2\sqrt{g^2 + r^2} e^{at} \cos(bt + j) = 3e^{-3t} + 2\sqrt{5}e^{-t} \cos(2t + 0.464)$$

2.3. Algebra blokových schémat

Jak jsme uvedli v úvodu 2. kapitoly, za předpokladu *informačních vazeb* mezi subsystemy lze pomocí jednoduchých pravidel tzv. „algebry blokových schémat“ snadno zjednodušit přenosové funkce složitých systémů a naopak, vytvářet přenosové funkce složitých systémů z přenosových funkcí jednoduchých subsystemů. V dalším uvedeme základní typy vazeb mezi subsystemy, souvislosti s určováním přenosových funkcí provazbených subsystemů a několik důležitých strukturálních pravidel.

Sériové spojení subsystemů

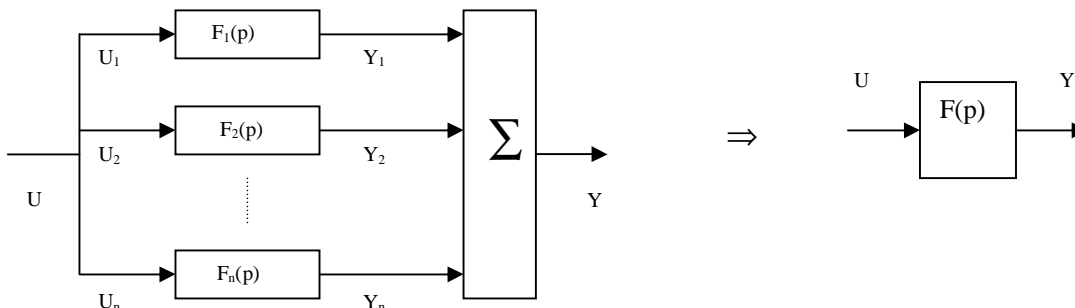


Při sériovém spojení platí: $Y_{n-i}(p) = F_{n-i}(p)U_{n-i}(p)$ přičemž $U_{n-i}(p) = Y_{n-1-i}$; $i = 1, \dots, n-1$.

Celkový přenos $F(p)$ při sériovém spojení je roven součinu dílčích přenosů

$$F(p) = \frac{Y_n(p)}{U_1(p)} = \frac{Y_n}{U_n = Y_{n-1}} \frac{Y_{n-1}}{U_{n-1} = Y_{n-2}} \dots \frac{Y_1}{U_1} = F_n(p)F_{n-1}(p) \dots F_1(p) = \prod_{i=1}^n F_i(p) \quad (2.21)$$

Paralelní spojení subsystémů

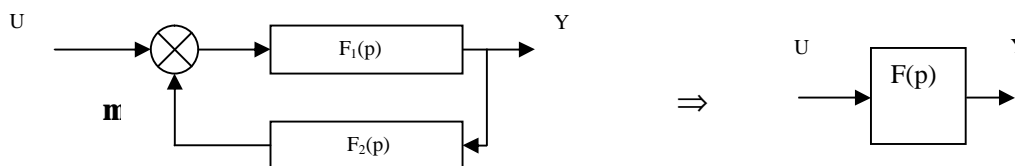


Při paralelním spojení platí: $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ a $U = U_1 = U_2 = \dots = U_n$

Celkový přenos $F(p)$ při paralelním spojení je roven součtu dílčích přenosů

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Y}{U} = \frac{Y_1}{U} + \frac{Y_2}{U} + \dots + \frac{Y_n}{U} = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p) = \sum_{i=1}^n F_i(p) \quad (2.22)$$

Zpětnovazební spojení subsystémů

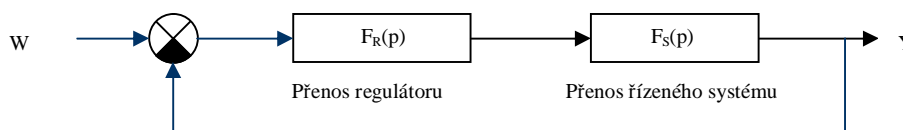


Platí: $Y(p) = F_1(p)[U(p) \mp F_2(p)Y(p)] \Rightarrow [1 \pm F_1(p)F_2(p)]Y(p) = F_1(p)U(p) \Rightarrow$

Celkový přenos $F(p)$ při zpětnovazebním spojení má v čitateli přenos „přímé větve“ a ve jmenovateli je k jedničce přičten resp. odečten přenos „otevřené smyčky“ v závislosti na tom, je-li zpětná vazba záporná resp. kladná:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{F_1(p)}{1 \pm F_1(p)F_2(p)} \quad (2.23)$$

Základní struktura regulačního obvodu obvykle předpokládá jednotkovou zpětnou vazbu

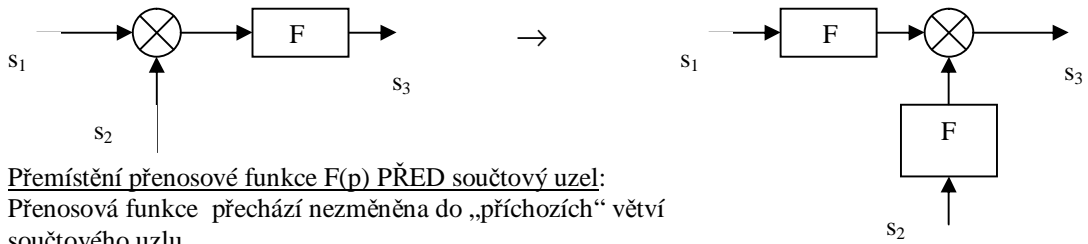


Celkový přenos tohoto regulačního obvodu se zápornou zpětnou vazbou je

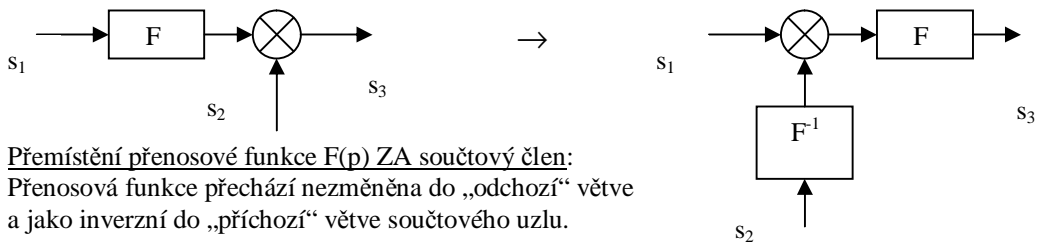
$$F(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} \quad (2.24)$$

Přenos otevřené regulační smyčky je $F_0(p) = F_S(p)F_R(p)$.

Přemístění přenosové funkce $F(p)$ PŘED a ZA součtový uzel



Přemístění přenosové funkce $F(p)$ PŘED součtový uzel:
 Přenosová funkce přechází nezměněna do „příchozích“ větví součtového uzlu.

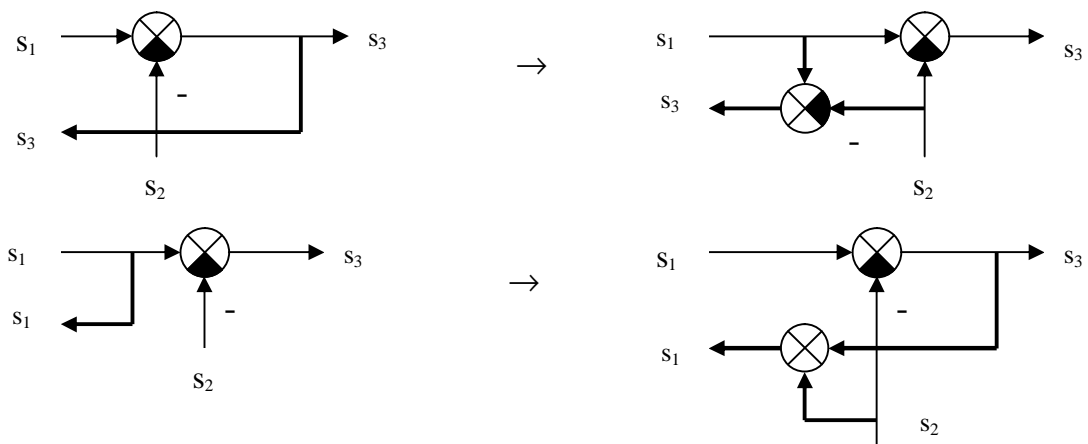


Přemístění přenosové funkce $F(p)$ ZA součtový člen:
 Přenosová funkce přechází nezměněna do „odchozí“ větve a jako inverzní do „příchozí“ větve součtového uzlu.

V blokovém schéma se vedle součtových uzlů mohou ještě vyskytnout rozvětvací body, které je někdy vhodné přemístit.

Přemístění rozvětvacího bodu PŘED a ZA součtový uzel.

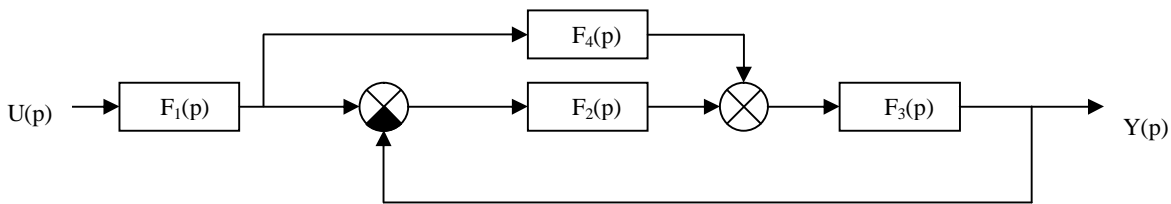
Ekvivalentní struktury jsou znázorněny na obrázcích a ponecháváme na čtenáři ověření jejich platnosti:



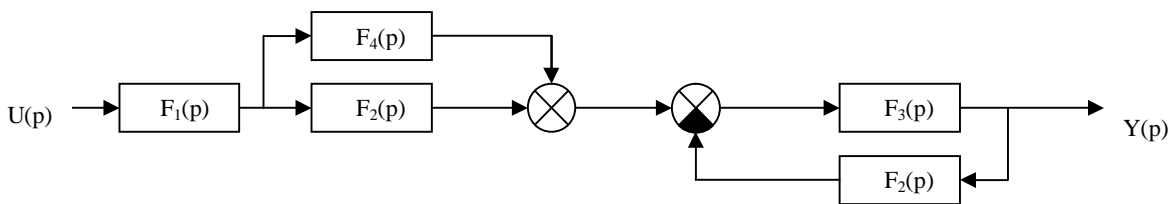
Součtové uzly je možno sdružovat i rozdružovat:



Příklad 2.3.: Zjednodušte blokové schéma a určete celkový přenos!



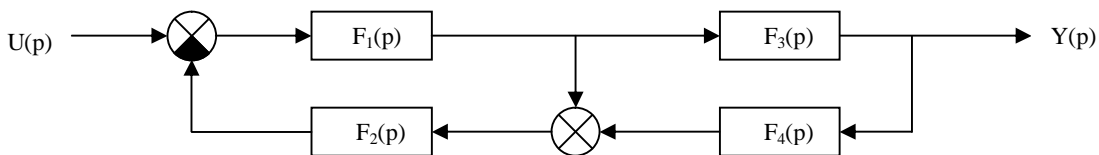
Řešení: Přenosovou funkci $F_2(p)$ přemístíme **před** součtový uzel, oba uzly nejprve sdružíme a opět rozdružíme:



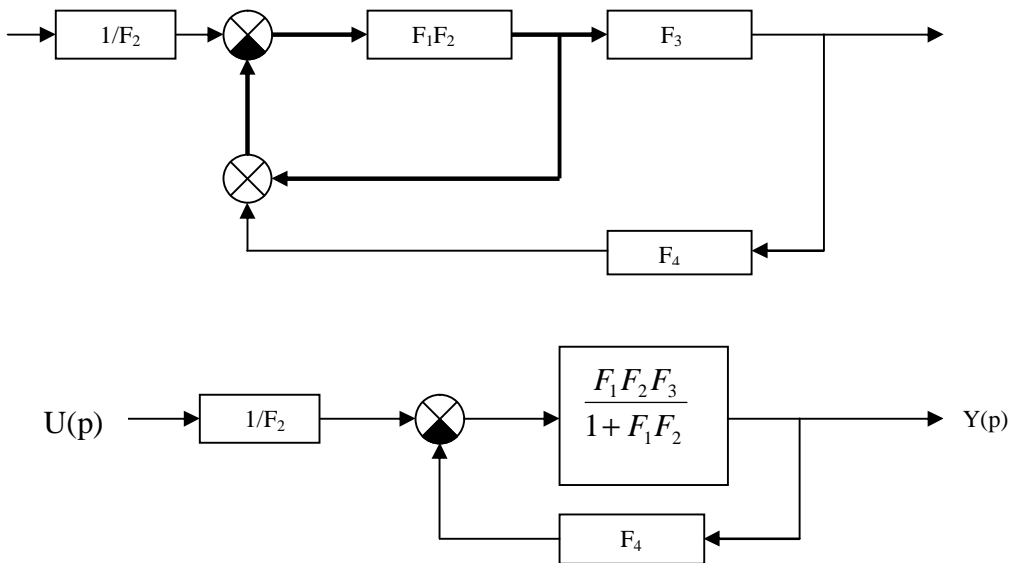
Pro určení celkového přenosu použijeme pravidla o sériovém, paralelním a zpětnovazebním spojení:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = F_1(p)(F_2(p) + F_4(p)) \frac{F_3(p)}{1 + F_2(p)F_3(p)} = \frac{F_1(p)F_2(p)F_3(p) + F_1(p)F_3(p)F_4(p)}{1 + F_2(p)F_3(p)}$$

Příklad 2.4.: Zjednodušte blokové schéma a určete celkový přenos!



Řešení: Přenosovou funkci $F_2(p)$ přemístíme **za** součtový uzel a odstraníme vnitřní zpětnovazební smyčku:



Pro určení celkového přenosu použijeme pravidla o sériovém zpětnovazebním spojení:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{F_2(p)} \frac{\frac{F_1(p)F_2(p)F_3(p)}{1 + F_1(p)F_2(p)}}{1 + \frac{F_1(p)F_2(p)F_3(p)F_4(p)}{1 + F_1(p)F_2(p)}} = \frac{F_1(p)F_3(p)}{1 + F_1(p)F_2(p) + F_1(p)F_2(p)F_3(p)F_4(p)}$$

2.4. Přenosové funkce elementárních členů

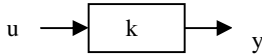
Z hlediska modelování lze pohlížet na obecnou přenosovou funkci jako na přenosovou funkci, která vznikla v důsledku provazbení jednoduchých subsystémů - *elementárních členů* - informačními vazbami, a tedy přípustnými operacemi mezi jejich přenosovými funkcemi. Přenosové funkce elementárních členů považujeme za dále nerozložitelné.

Elementární členy, vnější popis a zjednodušený příklad jejich praktické realizace:

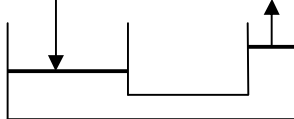
1/ Bezsetrvačný (proporcionální) člen

$$y(t) = ku(t)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = k$$

zesilovač: 

dvouramenná páka: 

hydraulický zesilovač: 

2/ Integrátor

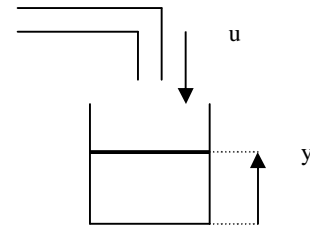
$$y(t) = \int_0^t u(t) dt ; \text{ n.p.p.}$$

$$\dot{y}(t) = u(t)$$

$$pY(p) = U(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p}$$

přítok kapaliny do nádoby:
(bez odtoku)



3/ Derivátor

$$y(t) = \dot{u}(t)$$

$$Y(p) = pU(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = p$$

4/ Aperiodický člen 1. řádu

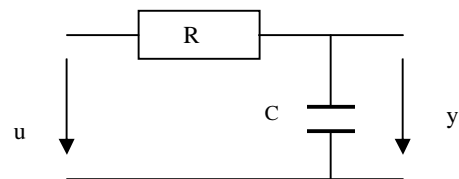
$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$(Tp + 1)Y(p) = U(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{Tp + 1}$$

$T = RC$ je časová konstanta

RC člen:



5/ Kmitavý člen 2. řádu (ryze imaginární či komplexně sdružené póly)

$$T_2^2 \ddot{y}(t) + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t); \quad T_1 < 2T_2$$

nebo v interpretovatelnějším tvaru

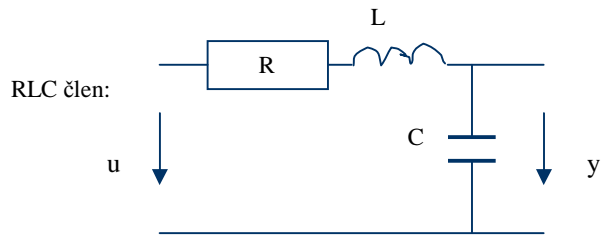
$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t);$$

$$(p^2 + 2\alpha\omega_n p + \omega_n^2)Y(p) = \omega_n^2 U(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\alpha\omega_n p + \omega_n^2}$$

kde α je relativní činitel tlumení, $\alpha \in [0, 1)$

ω_n je netlumená frekvence systému



Omezení zaručují existenci komplexních pólů. Při reálných pólech by byl přenos rozložitelný na dva aperiodické členy!

6/ Dopravní zpoždění

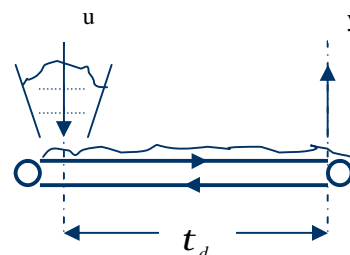
$$y(t) = u(t - t_d)$$

$$Y(p) = e^{-pt_d} U(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = e^{-pt_d}$$

t_d je časová konstanta dopravního zpoždění

Pásový dopravník:



2.5. Souvislosti mezi modely vnitřního a vnějšího popisu LDS

V 1. kapitole jsme ukázali, že fyzikální model reálného dynamického systému lze obvykle popsat vnějším modelem v podobě soustavy lineárních či nelineárních diferenciálních rovnic obecně vyššího řádu.

Převedením diferenciálních rovnic vyššího řádu na soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu jsme získali vnitřní model popisu jako stavový model dynamického systému s fyzikálně interpretovatelnými vnitřními - stavovými proměnnými.

Dále jsme ukázali, že pro účely modelování může být výhodné určit k dané stavové reprezentaci ekvivalentní stavové reprezentace se stejným modelem vnějšího popisu.

Zpětný přechod od stavové reprezentace k diferenciální rovnici jsme uskutečnili postupnou derivací výstupní rovnice při současném respektování stavových rovnic systému.

Ve 2. kapitole jsme zavedli přenosovou funkci jako alternativní model vnějšího popisu lineárních či linearizovaných dynamických systémů.

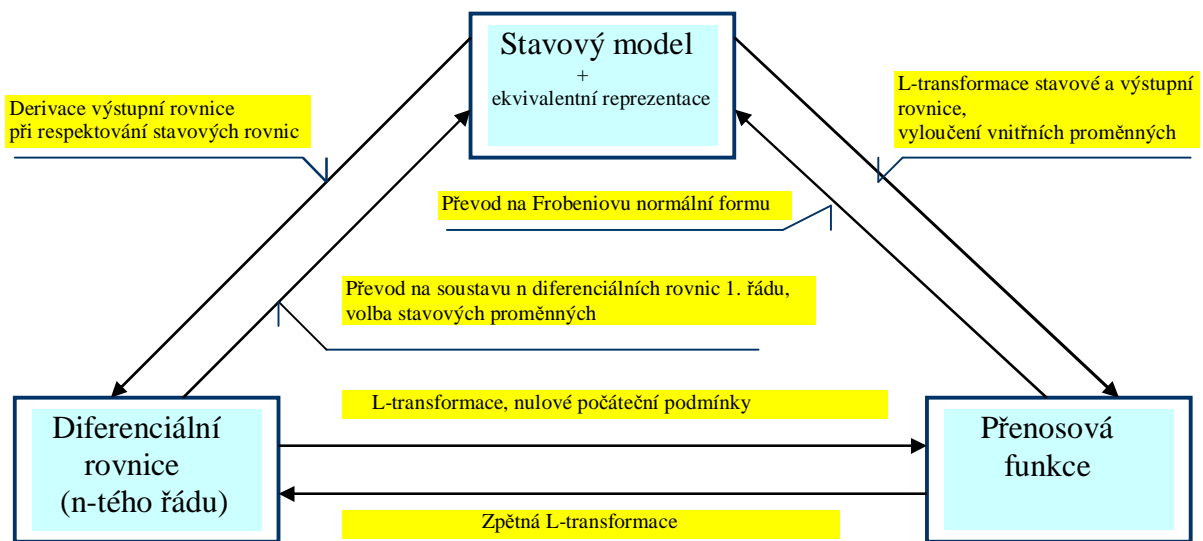
K dané diferenciální rovnici lze přenosovou funkci určit přímou aplikací Laplaceovy transformace na vstupní a výstupní proměnnou při nulových počátečních podmínkách.

Zpětný přechod od přenosové funkce k diferenciální rovnici je určen zpětnou Laplaceovou transformací L-obrazů vstupní a výstupní veličiny.

K dané stavové reprezentaci LDS lze přenosovou funkci určit Laplaceovou transformací stavové a výstupní rovnice při nulových počátečních podmínkách vyloučením vnitřních, stavových proměnných.

Pro zpětný přechod od přenosové funkce ke stavovému modelu jsme uvedli, že lze s výhodou použít převod do Frobeniovy normální formy.

Rekapitulaci souvislostí mezi modely vnitřního a vnějšího popisu znázorňuje následující schéma:



Souvislosti stavového modelu a přenosové funkce LDS:

- Zavedením přenosové funkce jsme přešli z časové oblasti do algebraické a za cenu zjednodušení některých úloh analýzy jsme poněkud ztratili fyzikální náhled na analýzu vlastností systémů, vyplývajících z řešení stavové rovnice.
- Objevily se nové pojmy jako nuly a póly systému, soudělnost a nesoudělnost polynomů, ryzí a striktně ryzí přenosová funkce apod.
- Stabilita či nestabilita vlastních čísel matice dynamiky odpovídá stabilitě či nestabilitě pólů, řád systému je dán stupněm charakteristického polynomu matice dynamiky a odpovídá stupni polynomu ve jmenovateli přenosové funkce. Relativní řád systému je dán rozdílem stupňů polynomu ve jmenovateli a čitateli přenosu a také prvním nenulovým Markovským parametrem, význam stabilních či nestabilních nul ale již tak průhledný není.
- Řiditelnost, pozorovatelnost a další vlastnosti byly většinou vázány na stavový popis a při vnějším popisu ztrácí význam. V této souvislosti je však důležité si uvědomit, že pokud je systém říditelný a pozorovatelný, jedná se o minimální realizaci systému, charakteristický polynom je minimálního stupně a v odpovídající přenosové funkci nemůže dojít ke krácení pólů systému oproti nulám systému. Je-li však přenosová funkce určena pro systém, který je neříditelný a/nebo nepozorovatelný, musí nutně ke krácení nul a pólů v přenosové funkci dojít.

Na závěr ukážeme na konkrétním příkladu praktický postup při určování přenosové funkce ze známého stavového modelu (mohli bychom tak odvodit přenosy všech lineárních a linearizovaných modelů reálných systémů uvedených v 1. kapitole).

Ve druhém příkladu ukážeme naopak postup, jak určit stavovou reprezentaci v normální Frobeniově formě pro obecný tvar přenosové funkce.

Příklad 2.5:

Použijte již odvozený stavový model stejnosměrného motoru řízeného do kotvy (1.14. -1.16) a určete přenosovou funkci pro případ, že vstupem $u(t)$ je napětí na kotvě $u_K(t)$ a výstupem $y(t)$ bude
 a/ úhlová rychlost otáčení $\omega(t)$ [rad/sec] b/ úhel natočení hřídele motoru $\theta(t)$ [rad]!

Řešení:

a/ Můžeme použít odvozený maticový tvar stavového modelu (1.15)

$$S(A, b, c^T): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_K}{L_K} & -\frac{k_e}{L_K} \\ \frac{k_M}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_K(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

a určit přenosovou funkci ze známého vztahu

$$F(p) = \frac{w(p)}{u_K(p)} = c^T (pI - A)^{-1} b = \dots$$

Z důvodu ilustrativnosti však použijeme postupné odvození přenosové funkce ze stavových rovnic (1.14):

$$L_K \frac{di_K(t)}{dt} + R_K i_K(t) = u_K(t) - k_e w(t); \quad J \frac{dw(t)}{dt} + b w(t) = k_M i_K(t); \quad \frac{dj(t)}{dt} = w(t)$$

Respektujme v rovnicích volbu stavových proměnných: $x_1(t) = i_K(t)$, $x_2(t) = w(t)$, $x_3(t) = j(t)$

a připomeňme, že vstupní veličinou je $u_K(t)$ a výstupní veličinou $w(t)$.

Po Laplaceově transformaci dostáváme stavové rovnice ve tvaru:

$$(L_K p + R_K) i_K(p) = u_K(p) - k_e w(p); \quad (Jp + b)w(p) = k_M i_K(p); \quad pj(p) = w(p)$$

Vyloučením vnitřní proměnné $i_K(p)$ z prvních dvou rovnic dostáváme po úpravě hledanou přenosovou funkci

$$F(p) = \frac{w(p)}{u_K(p)} = \frac{k_M}{(Jp + b)(L_K p + R_K) + k_e k_M}$$

Poznamenejme, že hodnoty parametrů reálných motorů jsou takové, že tato přenosová funkce má vždy reálné póly a přenosovou funkci lze modelově považovat za sériové spojení dvou aperiodických členů 1. řádu:

$$F(p) = \frac{w(p)}{u_K(p)} = \frac{k_M}{(Jp + b)(L_K p + R_K) + k_e k_M} = \dots = \frac{k}{(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)}$$

b/ Bude-li sledovaným výstupem úhel natočení, odvození je analogické s tím, že nyní uvažujeme všechny tři rovnice, ze kterých je nutné vyloučit vnitřní proměnné $i_K(p)$ a $w(p)$.

Přenosová funkce má oproti předchozímu případu navíc **astatismus prvního stupně**:

$$F(p) = \frac{j(p)}{u_K(p)} = \frac{k_M}{p[(Jp + b)(L_K p + R_K) + k_e k_M]} = \dots = \frac{k}{p(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)}$$

Příklad 2.6.: Určete stavovou reprezentaci ve Frobeniově tvaru pro přenosovou funkci

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2p^2 + 4p + 5}{p^2 + 0.5p + 2} = \frac{b(p)}{a(p)}$$

Řešení:

Přenosová funkce $F(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$ je **ryzí** (relativní řád = 0) a výstupní rovnice stavové reprezentace musí mít $d \neq 0$, viz (2.5).

Pro přímé určení parametrů matic ve Frobeniově stavové reprezentaci je nutné nejprve provést rozklad

$$F(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \rightarrow F(p) = \frac{\bar{b}(p)}{a(p)} + d, \quad \text{kde } \frac{\bar{b}(p)}{a(p)} \text{ je striktně ryzí a } \text{st } \bar{b}(p) = \text{st } b(p) - 1:$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2p^2 + 4p + 5}{p^2 + 0.5p + 2} = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{\bar{b}(p)}{a(p)} + d = \frac{\bar{b}_1 p + \bar{b}_0}{p^2 + 0.5p + 2} + d$$

Koeficienty polynomu v čitateli striktně ryzí přenosové funkce a současně i parametr d určíme porovnáním čitateľů

$$2p^2 + 4p + 5 = \bar{b}_1 p + \bar{b}_0 + dp^2 + 0.5dp + 2d \Rightarrow \bar{b}_1 = 3, \bar{b}_0 = 1, d = 2$$

Dostáváme

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2p^2 + 4p + 5}{p^2 + 0.5p + 2} = \frac{3p + 1}{p^2 + 0.5p + 2} + 2$$

a nyní již můžeme přímo zapsat stavovou reprezentaci systému v Frobeniově tvaru:

$$\text{SF: } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 2u(t)$$

Poznámka:

Pokud je přenosová funkce striktně ryzí (relativní řád je ≥ 1), parametry Frobeniovy reprezentace odpovídají známým způsobem přímo koeficientům polynomů přenosové funkce.

3. DYNAMICKÉ ODEZVY LDS

V předchozích dvou kapitolách jsme se věnovali matematickému popisu dynamických systémů a ukázali jsme, že dynamické chování lineárního systému je *explicitně* dáno buď modelem vnitřního nebo vnějšího popisu. V této kapitole se zaměříme na *implicitní* způsob zjištění chování a vlastností dynamického systému prostřednictvím analýzy jeho dynamických odezev. *Dynamickou odezvou rozumíme časově proměnné chování stavových proměnných nebo výstupu systému, kterým systém reaguje na počáteční podmínky a/nebo na vstupní signál.*

Jak uvidíme dále, dynamické odezvy nám mohou např. poskytnout postačující informaci o neznámém systému, pro který navrhujeme regulátor, ale také informaci o tom, zda regulátor byl úspěšně navržen a regulovaná veličina sleduje požadovaný typ referenčního signálu s minimální odchylkou.

Obecně je přirozeně možné analyzovat odezvu systému či regulačního obvodu na libovolný vstupní (testovací) signál, avšak teoretické i praktické důvody nás vedou k omezení množiny testovacích signálů. Ve většině případů vystačíme s několika základními typy signálů:

1/ Jednotkový impuls (Diracův impuls)

$$u(t) = d(t) \qquad d(t) : d(t) = 0 \quad \forall t, t \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d(t) dt = 1$$
$$U(p) = L\{d(t)\} = 1 \qquad (3.1)$$

Diracův impuls je fyzikálně nerealizovatelný, lze jej aproximovat např. obdélníkovým pulsem $q(t) : q(t) = 1/t$ pro $|t| \leq t/2$, $q(t) = 0$ pro $|t| > t/2$, který pro $t \rightarrow 0$ limituje k $d(t)$.

V dalším uvidíme, že Diracův impuls hraje důležitou roli v analýze systémů, protože odezva LDS na Diracův impuls je *impulsní funkce systému* $g(t)$. Její Laplaceův obraz je přenosová funkce systému $L\{g(t)\} = F(p)$ a impulsní funkce je také součástí *konvolutorního integrálu*, který lze použít pro výpočet odezvy systému na libovolný vstupní signál:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t)u(t)dt$$

Na druhé straně s použitím Diracova pulsu jako referenčního signálu, který by měl být přesně sledován regulovanou veličinou v navrženém regulačním obvodu, se v praxi nesetkáme.

2/ Jednotkový skok

$$u(t) = 1[t] \qquad u(t) : u(t) = 0 \text{ pro } t < 0; u(t) = 1 \text{ pro } t \geq 0$$
$$U(p) = L\{1[t]\} = \frac{1}{p} \qquad (3.2)$$

Jednotkový skok je jednoduše realizovatelný (sepnutí spínače). Odezva LDS na jednotkový skok je *přechodová funkce systému* $h(t)$, která poskytuje dobrou představu o chování a vlastnostech systému.

Jednotkový skok resp. po částech konstantní funkce je také častým typem testovacího signálu pro navržený regulační obvod, neboť regulace na konstantní hodnotu resp. sledování po částech konstantního signálu je častou regulační úlohou.

3/ Funkce lineárně rostoucí s časem (rampová funkce)

$$u(t) = kt \quad ; \quad k \dots \text{konstanta}$$
$$U(p) = L\{kt\} = \frac{k}{p^2} \qquad (3.3)$$

Funkce lineárně rostoucí s časem bývá požadovaným typem referenčního signálu, který má regulovaná veličina sledovat (např. regulace požadovaného nárůstu teploty v peci, sledování objektu pohybujícího se konstantní rychlostí a pod.).

3/ Harmonický signál

$u(t) = A \sin w_0 t$; A ...amplituda harmonického signálu, w_0 ...úhlová rychlost [rad / sec]

$$U(p) = A \frac{w_0}{p^2 + w_0^2} \quad (3.4)$$

Odezva na harmonický signál je základem frekvenčního přístupu k analýze i syntéze dynamických systémů.

3.1. Časové odezvy LDS při vnitřním a vnějším popisu

Uvažujme stavový model lineárního t -invariantního dynamického systému n -tého řádu (SISO)

S: $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$; $x(t_0) = x_0$, $x(t) \in R^n$, $u(t), y(t) \in R^1$

$$y(t) = c^T x(t) + du(t) \quad (3.5)$$

kterému odpovídá (při nulových počátečních podmínkách) přenosová funkce $F(p)$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \Big|_{n.p.p.} = c^T (pI - A)^{-1} b + d = \frac{c^T (pI - A)^{Adj} b}{\det(pI - A)} + d = \frac{b(p)}{a(p)} \quad (3.6)$$

Uveďme nejprve principiální možnosti výpočtu odezvy LDS při **vnitřním popisu systému**.

Stavová resp. výstupní odezva systému na známé počáteční podmínky a/nebo na známý vstupní signál jsou dány:

$$\text{řešením stavové rovnice} \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t)} bu(t) dt \quad (3.7)$$

$$\text{resp. výstupní rovnice} \quad y(t) = \underbrace{c^T e^{A(t-t_0)} x(t_0)}_{\text{odezva-při-nulovém-vstupu}} + \underbrace{\int_{t_0}^t c^T e^{A(t-t)} bu(t) dt + du(t)}_{\text{odezva-při-nulových-počátečních-podmínkách}} \quad (3.8)$$

$$\text{nebo zpětnou Laplaceovou transformací} \quad \begin{cases} x(t) = L^{-1} \left\{ \left[(pI - A)^{-1} x(0) \right] + \left[(pI - A)^{-1} b U(p) \right] \right\} \\ y(t) = L^{-1} \{ Y(p) \} \end{cases}$$

Jako příklad výpočtu odezvy při vnitřním popisu určíme *impulsní odezvu systému* $g(t)$, která je definována jako odezva systému na jednotkový (Diracův) impuls při nulových počátečních podmínkách. Po dosazení $d(t)$ do (3.8) za vstupní signál dostáváme impulsní funkci vyjádřenou pomocí matic A, b, c^T, d stavové reprezentace systému:

$$g(t) = c^T e^{At} b + dd(t) \quad (3.9)$$

Při **vnějším popisu** LDS přenosovou funkcí $F(p)$ lze vypočítat výstupní odezvu $y(t)$ na známý vstupní signál $u(t)$:

a/ zpětnou Laplaceovou transformací jejího obrazu $Y(p)$,

což je polynomiální zlomek, který lze rozložit na parciální zlomky

$$y(t) = L^{-1} \{ Y(p) \} = L^{-1} \{ F(p) U(p) \} = \sum_{i=1}^{n+n_u} r_i e^{p_i t} , \quad (3.10)$$

a r_i jsou residua funkce $Y(p)$ v pólech p_i ; n resp. n_u je počet pólů $F(p)$ resp. $U(p)$

b/ použitím konvolutorního integrálu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t) u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) u(t-t) dt , \quad (3.11)$$

kde $g(t)$ je impulsní funkce systému určená z (3.9) nebo jako $g(t) = L^{-1} \{ F(p) \}$.

Přirozená a vynucená složka odezvy

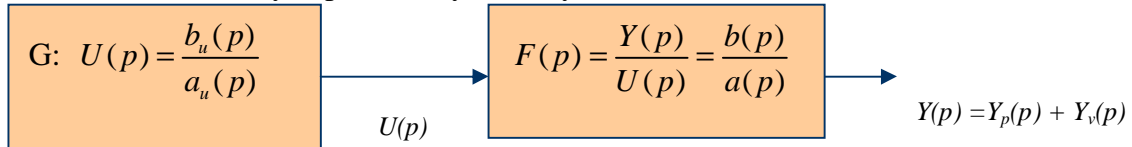
Je-li na systém v ustáleném stavu (můžeme jej ztotožnit s nulovými počátečními podmínkami) přiveden známý vstupní signál $u(t)$, je výstupní odezva $y(t)$ vytvářena součtem dvou složek:

$$y(t) = y_p(t) + y_v(t), \quad (3.12)$$

kde $y_p(t)$ je přirozená složka, závisící na dynamice daného systému s přenosem $F(p)$

a $y_v(t)$ je vynucená složka, závisící na dynamice systému G , generujícího vstupní signál.

To znamená, že i obraz výstupní odezvy bude vytvořen součtem obrazů těchto složek:



Předpokládáme: $a(p)$ a $a_u(p)$ jsou nesoudělné polynomy: n.s.d. $(a(p), a_u(p)) = 1$
 $\text{st } [b(p)b_u(p)] < \text{st } [a(p)a_u(p)]$

Pro L -obraz odezvy platí

$$Y(p) = F(p)U(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \frac{b_u(p)}{a_u(p)} = \underbrace{\frac{\hat{b}(p)}{a(p)}}_{Y_p(p)} + \underbrace{\frac{\hat{b}_u(p)}{a_u(p)}}_{Y_v(p)} \quad (3.13)$$

a v časové oblasti $y(t) = y_p(t) + y_v(t)$, $y_p(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\hat{b}(p)}{a(p)} \right\}$, $y_v(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\hat{b}_u(p)}{a_u(p)} \right\}$ (3.14)

Polynomy $\hat{b}(p), \hat{b}_u(p)$ lze určit odpovídajícím rozkladem (3.13) na parciální zlomky a jsou také řešením polynomiální (Diofantické) rovnice

$$a(p)\hat{b}_u(p) + a_u(p)\hat{b}(p) = b(p)b_u(p). \quad (3.15)$$

Z uvedeného vyplývá, že u stabilních LDS bude přirozená složka s rostoucím časem konvergovat k nule a odezva systému bude dána vynucenou složkou odezvy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) \quad (3.16)$$

Příklad 3.1.: Na vstup stabilního uzavřeného regulačního obvodu s přenosovou funkcí

$$F(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{7p^2 + 18p + 15}{p^3 + 5p^2 + 11p + 15} = \frac{b(p)}{a(p)} \quad \text{s póly } p_1 = -3, p_{2,3} = -1 \pm j2 \quad \text{je přiveden}$$

referenční signál $w(t) = t$, resp. $W(p) = \frac{1}{p^2} = \frac{b_w(p)}{a_w(p)}$. Určete přirozenou a vynucenou složku odezvy!

Řešení:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}, \quad Y(p) = F(p)W(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \frac{b_w(p)}{a_w(p)} = \frac{7p^2 + 18p + 15}{p^5 + 5p^4 + 11p^3 + 15p^2}$$

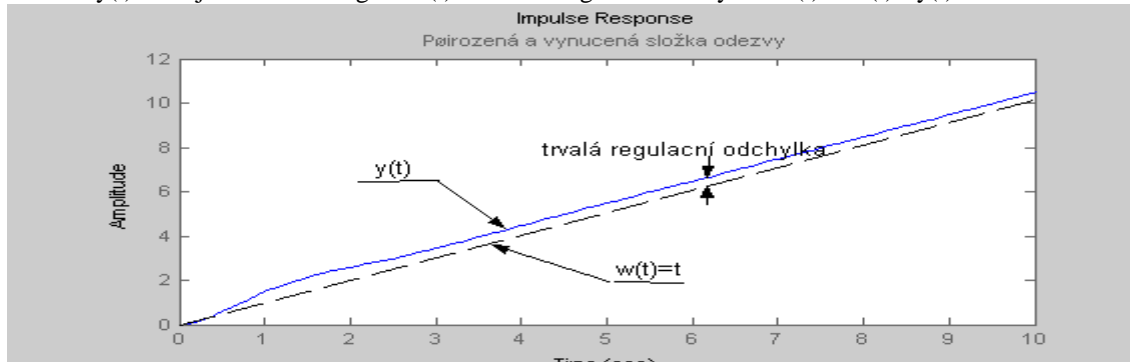
Přirozenou a vynucenou složku odezvy určíme rozkladem $Y(p)$ na parciální zlomky (Matlab: residue)

$$Y(p) = \frac{7p^2 + 18p + 15}{p^5 + 5p^4 + 11p^3 + 15p^2} = \frac{0.33}{p+3} + \frac{-0.4 + j0.2}{p+1-j2} + \frac{-0.4 - j0.2}{p+1+j2} + \frac{0.467}{p} + \frac{1}{p^2}$$

a zpětnou L-transformací

$$y(t) = y_p(t) + y_v(t) = 0.33e^{-3t} - 0.894e^{-t} \cos(2t - 0.464) + 0.467t$$

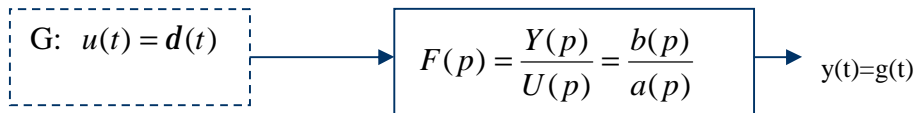
Přirozená složka odezvy konverguje k nule a celková odezva je dána vynucenou složkou. Odezva $y(t)$ sleduje referenční signál $w(t)$ s trvalou regulační odchylkou $e(t) = w(t) - y(t) = -0.467$.



3.2. Impulsní a přechodová funkce. Odezva na obecný vstupní signál

Impulsní funkce je definována jako odezva systému v nulových počátečních podmínkách na jednotkový (Diracův) impuls. Jejím grafickým znázorněním je *impulsní charakteristika*.

Experiment:
(idealizovaný)



Definice:

$$g(t) = y(t) \Big|_{\substack{u(t)=d(t) \\ n.p.p.}} \xrightarrow{L\text{-transformace}} G(p) = Y(p) \Big|_{U(p)=1} \Rightarrow G(p) = F(p)U(p) \stackrel{=1}{=} F(p) \quad (3.17)$$

Impulsní funkci lze tedy určit zpětnou Laplaceovou transformací přenosové funkce a naopak, přenosová funkce je dána Laplaceovým obrazem impulsní funkce:

$$g(t) = L^{-1}\{F(p)\} \quad F(p) = L\{g(t)\} \quad (3.18)$$

Výpočet $g(t)$:

$$g(t) = L^{-1}\{F(p)\} = L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{p - p_i}\right\} = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t} \quad (\text{vnější popis, nenásobné póly})$$

$$g(t) = c^T e^{At} b + dd(t) \quad (\text{vnitřní popis}) \quad (3.19)$$

Počáteční a konečná hodnota $g(t)$ pro systémy bez astatismu:

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pG(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{b(p)}{a(p)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \quad \text{pro } \text{st } a(p) - \text{st } b(p) \geq 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) \neq 0 \quad \text{pro } \text{st } a(p) - \text{st } b(p) < 2$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pG(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{b(p)}{a(p)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

Impulsní funkce v konvolutorním integrálu – odezva na obecný vstupní signál:

$$y(t) = \int_0^t g(t-t)u(t)dt \quad \text{nebo} \quad y(t) = \int_0^t c^T e^{A(t-t)} bu(t)dt \quad (3.20)$$

$$(u(t) = 0 \text{ pro } t < 0, \quad g(t-t) = 0 \text{ pro } t-t < 0)$$

Impulsní funkce a stabilita LDS:

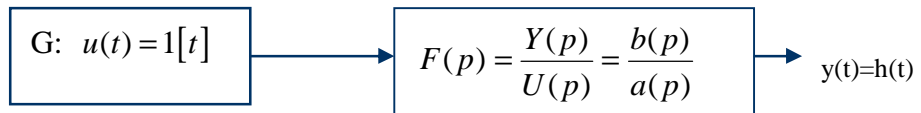
Vnitřní stabilita LDS ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_r \equiv 0$) implikuje vnější (BIBO) stabilitu LDS, ale nikoliv naopak, protože výstup systému může být odvozen pouze ze stabilních složek vektoru stavu!

Připomeňme, že LDS je BIBO stabilní $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$ a $g(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t}$

a odtud vyplývá, že vnitřní stabilita LDS ($\text{Re } p_i < 0, \forall i$) implikuje i BIBO stabilitu.

Přechodová funkce je definována jako odezva systému v nulových počátečních podmínkách na jednotkový skok. Jejím grafickým znázorněním je *přechodová charakteristika*.

Experiment:



Definice:

$$h(t) = y(t) \Big|_{\substack{u(t)=1[t] \\ n.p.p.}} \xrightarrow{L\text{-transformace}} H(p) = Y(p) \Big|_{U(p)=\frac{1}{p}} \Rightarrow H(p) = F(p)U(p) = F(p)\frac{1}{p} \quad (3.21)$$

Výpočet $h(t)$:

$$h(t) = L^{-1}\left\{F(p)\frac{1}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{r_i}{p-p_i}\right\} = \sum_{i=1}^{n+1} r_i e^{p_i t} \quad (\text{nenásobné póly})$$

nebo
$$h(t) = \int_0^t g(t-t)1[t]dt, \quad \text{kde } g(t) = c^T e^{At}b + dd(t) \quad (3.22)$$

Počáteční a konečná hodnota $h(t)$ pro systémy bez astatismu:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pH(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)\frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{b(p)}{a(p)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \quad \text{pro } \text{st } a(p) - \text{st } b(p) \geq 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) \neq 0 \quad \text{pro } \text{st } a(p) - \text{st } b(p) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pH(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)\frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{b(p)}{a(p)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \neq 0.$$

Příklad 3.2.: Určete impulsní a přechodovou funkci pro systém s přenosovou funkcí $F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p+1}$

Řešení:

Přenosová funkce je ryzí (relativní řád je 0), a proto ji nejprve rozložíme na striktně ryzí + konst.:

$$F(p) = \frac{p+2}{p+1} = \frac{1}{p+1} + 1 \rightarrow g(t) = L^{-1}\{F(p)\} = e^{-t} + d(t)$$

Pro určení přechodové funkce použijeme nejprve konvolutorní integrál:

$$h(t) = \int_0^t g(t-t)1[t]dt = \int_0^t [e^{-(t-t)} + d(t-t)]1[t]dt = e^{-t} \int_0^t e^t 1[t]dt + \int_0^t d(t-t)1[t]dt =$$

$$= e^{-t}(e^t - 1) + 1 = 2 - e^{-t}$$

Alternativní výpočet $h(t)$ provedeme rozkladem na parciální zlomky:

$$h(t) = L^{-1}\left\{F(p)\frac{1}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p+2}{(p+1)p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{r_1}{p+1} + \frac{r_2}{p}\right\}$$

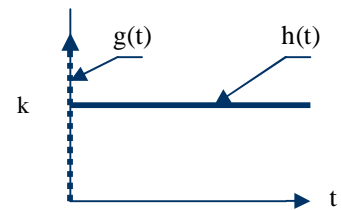
Výpočtem určíme residua $r_1 = -1, r_2 = 2$ a po zpětné transformaci dostáváme stejný výsledek: $h(t) = 2 - e^{-t}$

Impulsní a přechodové funkce elementárních členů:

Přenos členu $F(p)$	$g(t)$	$h(t)$	Impulsní a přechodová char.
---------------------	--------	--------	-----------------------------

Proporcionální člen
 $F(p) = k$

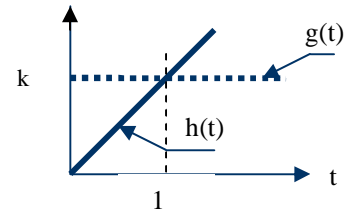
$k \delta(t)$ k



Integrátor

$F(p) = \frac{k}{p}$

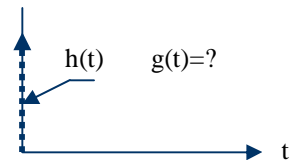
$k \int_0^t 1 dt$ $k t$



Derivátor

$F(p) = p$

$\frac{d}{dt} \delta(t)$ $\delta(t)$

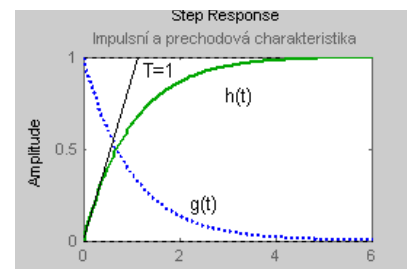


Aperiodický člen 1.řádu

$F(p) = \frac{1}{pT + 1}$

$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ $1 - e^{-\frac{t}{T}}$

**Časová konstanta T je dána průsečíkem tečny k přechodové charakteristice v počátku s ustálenou hodnotou $h(t)$.
 Přechodová charakteristika pro $t = T$ nabývá 63.2% ustálené hodnoty a pro $t = 3T$ asi 95% ustálené hodnoty!**



Kmitavý člen 2.řádu

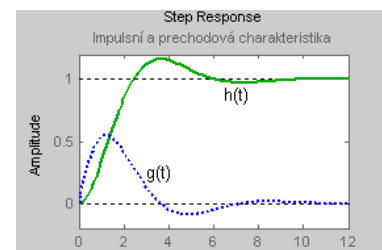
$F(p) = \frac{w_n^2}{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}$ $ke^{at} \cos(bt + j)$ $\int_0^t g(t - \tau) d\tau$

Poznámka:

$g(t)$ a $h(t)$ jsou zakresleny pro $w_n = 1$, $x = 0.5$.

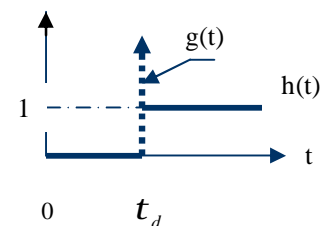
Význam parametrů k, a, b, j je zřejmý ze vztahů (2.18) – (2.20).

Odezvy kmitavého členu budou podrobněji analyzovány v následující části.



Dopravní zpoždění

$F(p) = 1e^{-pt_d}$ $\delta(t - t_d)$ $1[t - t_d]$



Souvislost rozložení pólů a odezvy na jednotkový skok u kmitavého členu 2. řádu.

Přenosová funkce kmitavého členu 2. řádu (se statickým zesílením K)

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Kw_n^2}{p^2 + 2xw_n p + w_n^2} \quad (3.23)$$

je parametrizovaná **netlumenou (přirozenou) frekvencí** systému w_n , $w_n > 0$ a **relativním činitelem tlumení** x . Pro stabilní kmitavý člen 2. řádu musí platit $x \in (0,1)$.

Při $x = 0$ je člen *na mezi kmitavé stability*, pro $x < 0$ dostaneme *nestabilní kmitavý člen* a pro $x \geq 1$ je přenos rozložitelný na *dva sériově spojené stabilní aperiodické členy 1. řádu*.

Je zřejmé, že parametry x, w_n parametrizují rozložení pólů i průběh časových odezev.

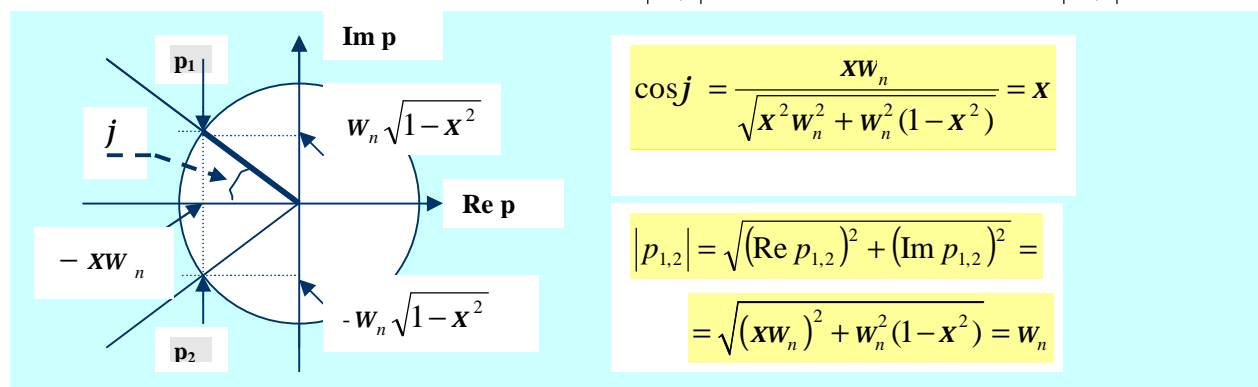
Věnujme nejprve pozornost parametrizaci rozložení pólů.

Komplexní póly jsou určeny řešením kvadratické rovnice $p^2 + 2xw_n p + w_n^2 = 0$:

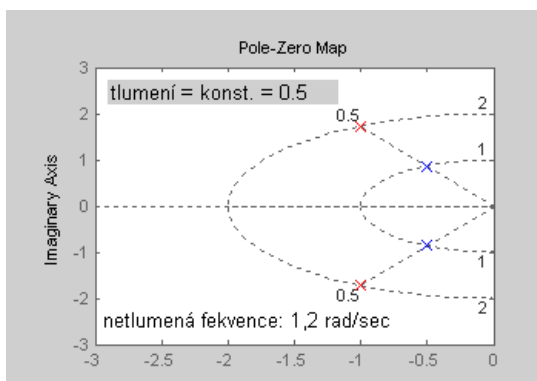
$$p_{1,2} = -xw_n \pm jw_n \sqrt{1-x^2} = a \pm jb \quad (3.24)$$

tlumená frekvence

Zakreslíme-li dvojici (stabilních) komplexně sdružených pólů $p_{1,2}$ v komplexní rovině p , zjišťujeme, že póly se nachází na průsečíku polopřímek svírajících se zápornou reálnou osou úhel j a kružnice se středem v počátku a poloměrem $|p_{1,2}|$, přičemž platí $x = \cos j$ a $|p_{1,2}| = w_n$:

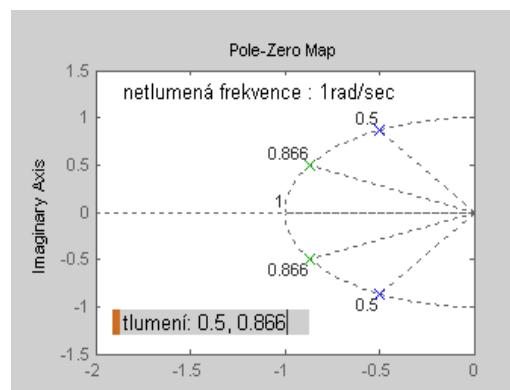


Z uvedeného vyplývá, že při fixovaném x leží póly na polopřímce a jejich vzdálenost od počátku je rovna netlumené frekvenci w_n . Při fixovaném w_n leží póly na kružnici o poloměru w_n a čísel relativního tlumení x je dán kosinem úhlu polopřímky vycházející z počátku a procházející příslušným pólem. Obě varianty jsou ilustrovány na následujících obrázcích (Matlab: pzmap):



Odpovídající přenosové funkce:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}, \quad F(p) = \frac{4}{p^2 + 2p + 4}$$



Odpovídající přenosové funkce:

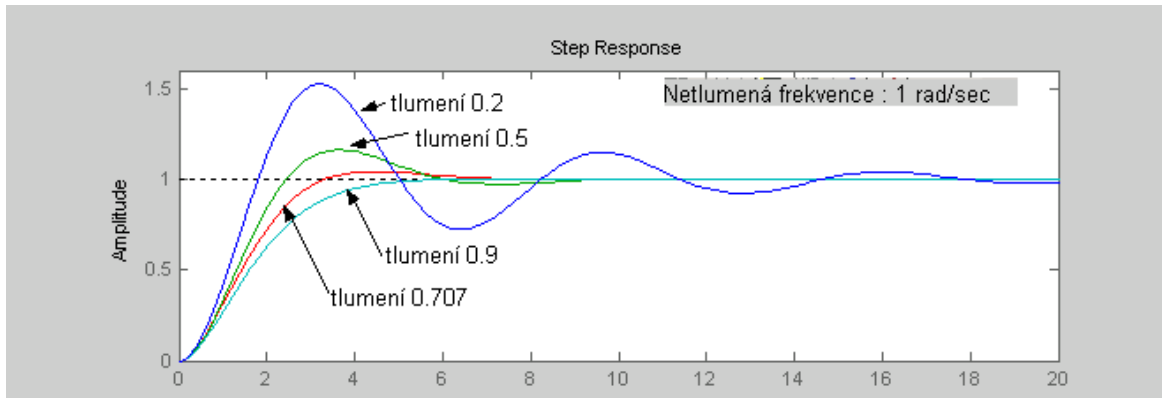
$$F(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}, \quad F(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{3}p + 1}$$

Souvislost rozložení pólů kmitavého členu 2. řádu s průběhem přechodové charakteristiky $h(t)$ souvislost parametrů x, w_n s kvalitativním hodnocením jejího průběhu.

Jako motivační příklad jsou na následujícím obrázku zakresleny přechodové charakteristiky

kmitavého členu 2.řádu s přenosem $F(p) = \frac{w_n^2}{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}$, při $w_n = 1$ rad/sec

a pro $x = 0.2, 0.5, 0.707$ a 0.9 :



Pro $x \in (0,1)$ jsou póly (3.24) **komplexně sdružené** (stabilní) a přechodový děj charakterizujeme jako **tlumený**.

Při $x=0$ jsou póly **ryze imaginární**, systém je na mezi kmitavé stability a přechodový děj charakterizujeme jako **netlumený**.

Při $x=1$ dostaneme **dvojnásobný reálný pól** a přechodový děj charakterizujeme jako **kriticky tlumený**.

Pro $x > 1$ dostaneme **dva reálné, různé póly**, nejedná se již o kmitavý člen 2. řádu a přechodový děj charakterizujeme jako **přetlumený**.

Jak uvidíme dále, z praktického hlediska nás bude zajímat především průběh přechodové funkce $h(t)$ stabilního kmitavého členu 2. řádu, tj. pro $x \in (0,1)$ a $w_n > 0$.

Pro výpočet přechodové funkce $h(t)$ využijeme rozklad obrazu skokové odezvy systému na parciální zlomky (viz (3.22)) a zpětnou Laplaceovu transformaci:

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{-xw_n t} \sin \left(w_n \sqrt{1-x^2} t + \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right); \quad x \in (0,1) \quad (3.25)$$

Konkrétním hodnotám parametrů x, w_n odpovídá rozložení pólů $p_{1,2} = -xw_n \pm jw_n \sqrt{1-x^2}$ a konkrétní hodnoty parametrů také jednoznačně určují přechodovou funkci $h(t)$, resp. přechodovou charakteristiku.

Protože jako kmitavý člen druhého řádu se mohou kvalitativně chovat i uzavřené regulační obvody, používají se v regulačních úlohách místo parametrů x, w_n takové parametry, které hodnotí průběh přechodové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu a zastupují obvykle formulované požadavky na požadovaný průběh regulačního procesu:

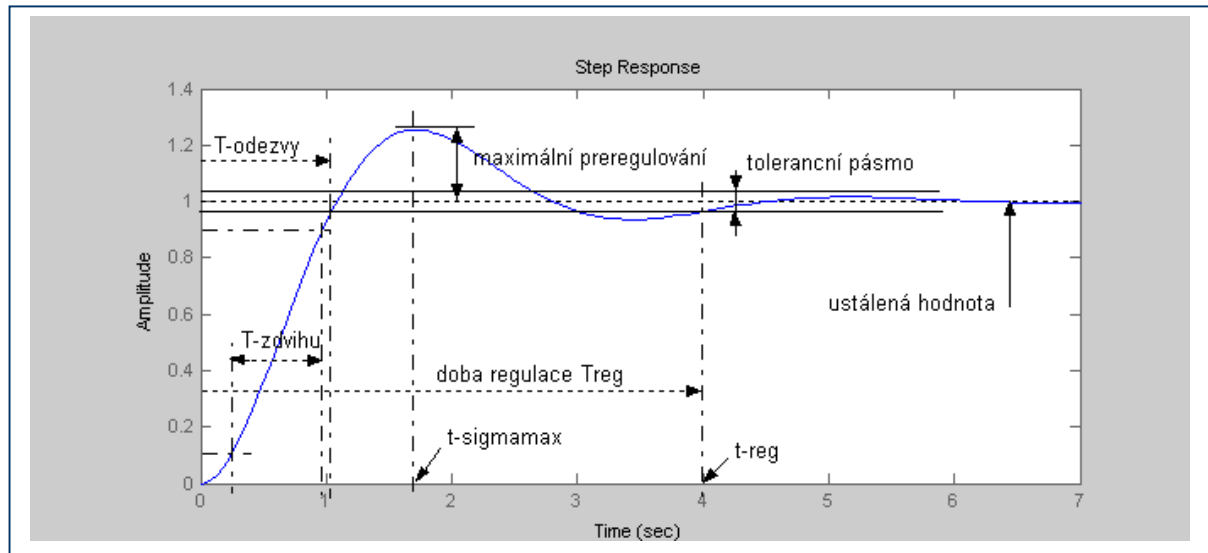
1/ maximální relativní přeregulování S_{\max}

$$S_{\max} = \frac{h_{\max}(t) - h(\infty)}{h(\infty)} \quad \text{nebo procentuálně} \quad S_{\max} [\%] = \frac{h_{\max}(t) - h(\infty)}{h(\infty)} 100$$

2/ časový okamžik maximálního přeregulování $t_{S_{\max}}$, $h_{\max}(t) = h(t_{S_{\max}})$

- 3/ **doba regulace** T_{reg} - vymezená časovým okamžikem t_{reg} , od kterého již $h(t)$ zůstává uvnitř zvoleného tolerančního pásma $h(\infty) \pm d_{2\%}, d_{5\%}, d_{10\%}$
- 4/ **doba odezvy** T_{od} - vymezená prvním časovým okamžikem t_{od} , kdy $h(t_{od}) = h(\infty)$
- 5/ **doba zdvihu** T_{zd} - definovaná časovým intervalem, ve kterém se změnila hodnota odezvy z 10% na 90% své ustálené hodnoty $h(\infty)$.

Význam těchto parametrů budeme ilustrovat opět na přechodové charakteristice kmitavého systému 2. řádu ($w_n = 2 \text{ rad/sec}$, $x = 0.2$):



Pro tlumené přechodové děje kmitavých systémů 2. řádu tj. pro $x \in (0,1)$ lze získat analytické výrazy pro funkční závislost těchto parametrů na parametrech x a w_n . Například výrazy pro $t_{s \max}$ a s_{\max} určíme z nutné podmínky extrému přechodové funkce (3.25), tj. z anulace její časové derivace.

Po úpravách lze získat podmínku

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{w_n e^{-xw_n t}}{\sqrt{1-x^2}} \sin w_n \sqrt{1-x^2} t = 0 \Big|_{t=t_{s \max}} \quad (3.26)$$

která bude splněna, jestliže $\sin w_n \sqrt{1-x^2} t_{s \max} = 0$ resp. jestliže $w_n \sqrt{1-x^2} t_{s \max} = p$.

Dostáváme tak výraz pro časový okamžik ve kterém dochází k maximálnímu přeregulování

$$t_{s \max} = \frac{p}{w_n \sqrt{1-x^2}} \quad (3.27)$$

a po dosazení za t_{\max} do (3.25) a úpravě, výraz pro hodnotu maximálního přeregulování s_{\max}

$$s_{\max} = e^{-\frac{px}{\sqrt{1-x^2}}} \quad (3.28)$$

V praktických úlohách potřebujeme naopak určit parametry x a w_n z odměřených či požadovaných hodnot $t_{s \max}$ a s_{\max} :

$$t_{s \max} = \frac{p}{w_n \sqrt{1-x^2}} \Rightarrow w_n = \frac{p}{t_{s \max} \sqrt{1-x^2}} \quad (3.29)$$

$$s_{\max} = e^{\frac{px}{\sqrt{1-x^2}}} \Rightarrow \ln s_{\max} = -\frac{px}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow x = \frac{\frac{\ln s_{\max}}{p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln s_{\max}}{p}\right)^2}} \quad (3.30)$$

Příklad 3.3.:

Z experimentálně zjištěné kmitavé přechodové charakteristiky neznámého systému bylo odměřeno:

$$h_{\max} = 2.04, \quad t_{s \max} = 1.22 \text{ sec}, \quad h(\infty) = 1.5.$$

Předpokládejte, že se jedná o kmitavý člen 2.řádu a určete jeho přenosovou funkci.

Řešení:

$$s_{\max} = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} = \frac{2.04 - 1.5}{1.5} = 0.36; \quad \ln s_{\max} = -1.0217$$

$$x = \frac{\frac{\ln s_{\max}}{p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln s_{\max}}{p}\right)^2}} = \frac{0.3252}{\sqrt{1 + (0.3252)^2}} = 0.31; \quad w_n = \frac{p}{t_{s \max} \sqrt{1-x^2}} = \frac{p}{1.22 \sqrt{1 - (0.3093)^2}} = 2.71$$

Přenosová funkce kmitavého členu 2.řádu bude mít tvar

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K w_n^2}{p^2 + 2x w_n p + w_n^2} = \frac{1.5 (2.71)^2}{p^2 + 2(0.31)(2.71)p + (2.71)^2} = \frac{11.02}{p^2 + 1.68p + 7.34}$$

$$s \text{ póly: } p_{1,2} = -x w_n \pm j w_n \sqrt{1-x^2} = -0.84 \pm j 2.58$$

$$\text{Statické zesílení: } K = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p) \frac{1}{p} = \frac{11.02}{7.34} = 1.5$$

Bude-li neznámým systémem skutečně kmitavý člen 2. řádu, bude přenosová funkce určena přesně. Bude-li neznámým systémem kmitavý člen sice vyššího řádu, ale s dominantní dvojicí komplexně sdružených pólů (dominantní póly jsou póly umístěné nejbližší k imaginární ose), určená přenosová funkce může být akceptovatelnou aproximací skutečné přenosové funkce neznámého systému vyššího řádu.

Existence dominantní dvojice komplexně sdružených pólů je motivující i pro úlohy regulační. Pokud bude uzavřený regulační obvod popsán modelem kmitavého členu 2.řádu nebo vyššího řádu s dominantní dvojicí komplexně sdružených pólů, můžeme podle (3.29),(3.30) určit z požadovaných $t_{s \max}$ a s_{\max} parametry x a w_n , které budou specifikovat dle (3.24) požadované umístění pólů uzavřeného regulačního obvodu. Požadované umístění pólů potom zajistíme návrhem regulátoru (viz kapitoly 7 a 9).

V požadavcích na $t_{s \max}$ a s_{\max} bývá časový okamžik $t_{s \max}$ nahrazován požadavkem na dobu regulace T_{reg} . Parametry x a w_n potom musí být určeny z požadovaných s_{\max} a T_{reg} .

Přibližné vztahy pro závislost doby regulace T_{reg} na parametrech x a w_n (liší se respektováním různé šířky tolerančního pásma 5%, 2%, 1%) byly odvozeny z exponenciálního tlumení kmitavého procesu – viz (3.25) a využíváme je pro určení parametru w_n :

$$x = \frac{\frac{\ln S_{\max}}{p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln S_{\max}}{p}\right)^2}} ; \quad w_n \cong \frac{3}{xT_{reg5}}, \quad w_n \cong \frac{4}{xT_{reg2}}, \quad w_n \cong \frac{4.8}{xT_{reg1}} \quad (3.31)$$

Závěrečné poznámky k časovým odezvám LDS:

Doposud jsme se zabývali dynamickými časovými odezvami a charakteristikami a to jak při vnitřním, tak i při vnějším popisu LDS.

Statická odezva resp. statická charakteristika LDS vyjadřuje závislost mezi vstupní a výstupní veličinou v ustáleném stavu a pro LDS je to přímka procházející počátkem se směrnicí K (statické zesílení). V této souvislosti připomeňme, že systémy s astatismem nemají ustálenou hodnotu a nelze tedy hovořit o jejich konečném statickém zesílení.

Statické zesílení LDS popsaného přenosovou funkcí $F(p)$ určíme z obrazu skokové odezvy systému a s použitím limitní věty o konečné hodnotě: $K = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \frac{1}{p} = F(0)$.

3.3. Frekvenční odezva LDS

Důležitou třídou „testovacích signálů“ při analýze systémů a návrhu řídicích systémů jsou harmonické signály, obvykle reprezentované sinusovým signálem

$$u(t) = A_u \sin wt ; \quad A_u \text{ je konstantní amplituda vstupního signálu, } t \geq 0, w \in \langle 0, \infty \rangle \quad (3.32)$$

*Je-li sinusový signál s konstantní amplitudou přiveden na vstup stabilního systému v ustáleném stavu, potom ustálenou výstupní odezvu nazýváme **frekvenční odezvou systému**.*

Jak uvidíme dále, frekvenční odezva je vlastně vynucená složka $y_v(t)$ odezvy $y(t)$ v ustáleném stavu, protože přirozená složka odezvy $y_p(t)$ pro stabilní systém konverguje k nule.

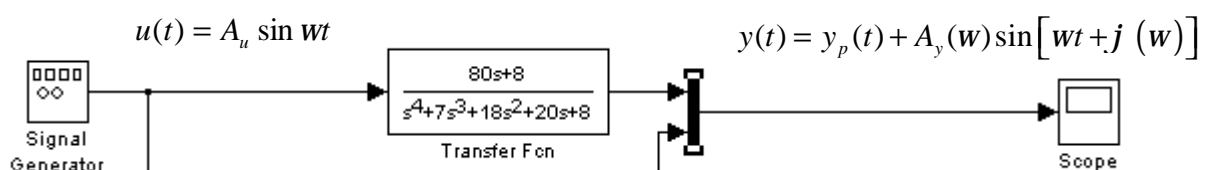
Vynucená složka $y_v(t)$ zachovává sinusový charakter a frekvenci vstupního signálu i ve výstupní odezvě. Nestabilní systémy přirozeně také reagují na harmonický vstupní signál frekvenční odezvou, avšak nestabilní módy přirozené složky odezvy nám znemožní její měření a musíme se uchýlit k jejímu výpočtu.

Motivační experiment:

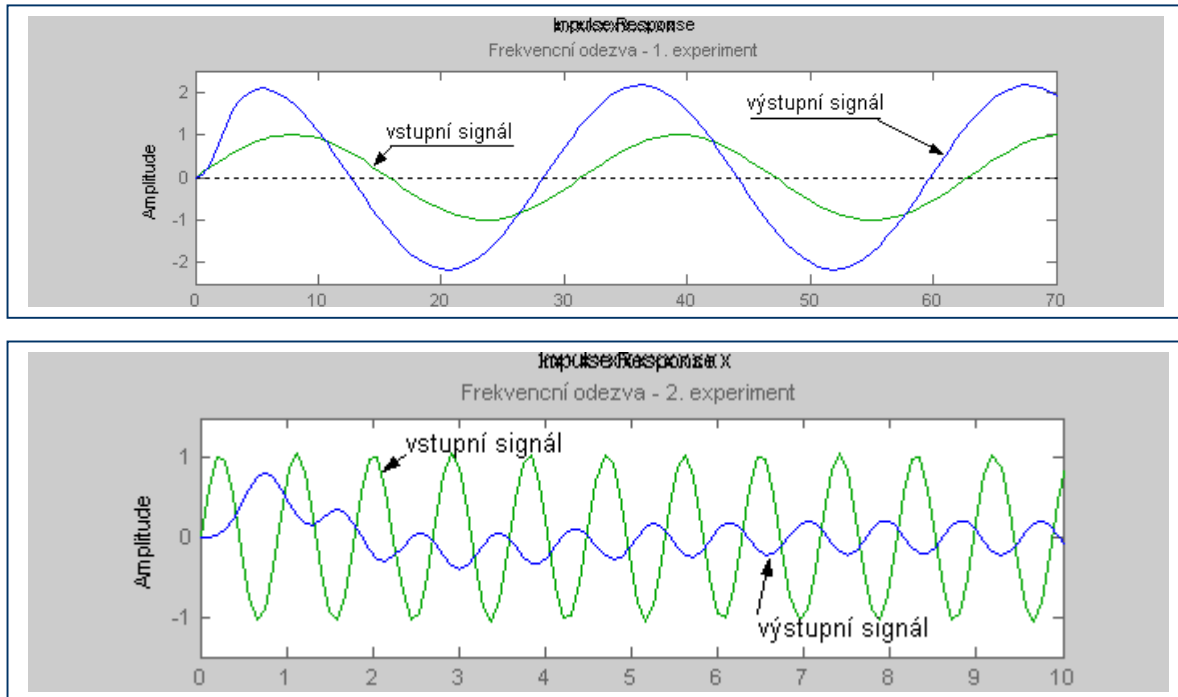
Simulujme experimentální určení frekvenční odezvy LDS, popsaného přenosovou funkcí

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{80p + 8}{p^4 + 7p^3 + 18p^2 + 20p + 8}$$

Na vstup LDS přivedeme harmonický signál $u(t) = A_u \sin wt$ a provedeme dva experimenty se stejnou amplitudou $A_u = 1$, ale pro dvě různé frekvence: $w_1 = 0.2$ rad/sec a $w_2 = 7$ rad/sec.



Grafické záznamy vstupního signálu a výstupního signálu:



1/ Pro vstupní signál $u(t) = 1 \sin(0.2t)$ dochází k amplitudovému zesílení vstupního signálu, výstupní signál má v ustáleném stavu amplitudu $A_y \cong 2.2$, fázově předbíhá vstupní signál o $j \cong +30^\circ$ („fázový předstih“) a jeho frekvence je shodná s frekvencí ω vstupního signálu.

2/ Pro vstupní signál $u(t) = 1 \sin(7t)$ dochází k amplitudovému zeslabení vstupního signálu, výstupní signál má amplitudu $A_y \cong 0.2$, fázově se zpožďuje oproti vstupnímu signálu o $j \cong -220^\circ$ („fázové zpoždění“) a jeho frekvence je opět shodná s frekvencí ω vstupního signálu.

V tomto případě je zřetelně vidět, že přirozená složka odezvy konverguje k nule a že vynucená složka odezvy zachová sinusový charakter a frekvenci vstupního signálu.

Z experimentu vyplývá, že lineární systém reaguje na vstupní signál $u(t) = A_u \sin \omega t$ frekvenční odezvou, kterou lze zapsat ve tvaru $y(t) = y_p(t) + A_y(\omega) \sin[\omega t + j(\omega)]$.

Amplituda výstupního signálu $A_y(\omega)$, či obecně amplitudové zesílení $A_y(\omega)/A_u(\omega)$ a fázový posun $j(\omega)$ výstupního signálu jsou funkce závislé na frekvenci vstupního signálu ω .

Pro experimentálně zjištěnou frekvenční odezvu a funkční závislosti amplitudového zesílení a fázového posunu na frekvenci nyní odvodíme potřebné matematické vztahy, které nám poskytnou informace o chování a vlastnostech systému z frekvenčního hlediska a budou základem frekvenčních metod návrhu řídicích systémů.

Poznámka: Vypočteme-li frekvenční odezvu stabilního LDS se známou přenosovou funkcí $F(p)$, kdy na vstupu je sinusový signál se zvolenou frekvencí ω_1 a s jednotkovou amplitudou $A_u = 1$, bude amplituda výstupního signálu $A_y(\omega_1)$ přímo rovna amplitudovému zesílení $A_y(\omega_1)/1$.

1/ Výpočet frekvenční odezvy pomocí konvolutorního integrálu

Předpokládáme, že pro systém zadaný přenosovou funkcí je známa i jeho impulsní funkce $g(t)$.

Protože $u(t) = 1 \sin \omega_1 t = \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j}$, určíme nejprve – pouze z matematických důvodů –

frekvenční odezvu na komplexní vstupní signál $u(t) = e^{j\omega_1 t}$:

$$y_v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t)u(t-t)dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t)e^{jw_1(t-t)} dt = e^{jw_1 t} \int_0^\infty g(t)e^{-jw_1 t} dt = F(jw_1)e^{jw_1 t} \quad (3.33)$$

kde $g(t)$ je impulsní funkce, $F(jw)$ je Fourierův obraz impulsní funkce $g(t) \equiv$ frekvenční přenos.

Analogicky k definici přenosové funkce $F(p)$ jako Laplaceova obrazu impulsní funkce $g(t)$, definujeme i frekvenční přenos $F(jw)$ jako Fourierův obraz impulsní funkce $g(t)$.

Odtud vyplývá, že $F(jw) = F(p)|_{p=jw}$ a také, že pro libovolné $w_1 \in \langle 0, \infty \rangle$ je frekvenční přenos $F(jw_1)$ komplexní číslo

$$F(jw_1) = \int_0^\infty g(t)e^{-jw_1 t} dt = \int_0^\infty g(t)[\cos w_1 t - j \sin w_1 t] dt = \operatorname{Re} F(jw_1) + j \operatorname{Im} F(jw_1), \quad (3.34)$$

které lze převést na polární tvar:

$$F(jw_1) = |F(jw_1)|e^{j\varphi(w_1)}; \quad |F(jw_1)| = \sqrt{(\operatorname{Re} F)^2 + (\operatorname{Im} F)^2}, \quad \varphi(w_1) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F(jw_1)}{\operatorname{Re} F(jw_1)} \quad (3.35)$$

Pro výpočet frekvenční odezvy na vstupní signál $u(t) = 1 \sin w_1 t = \frac{e^{jw_1 t} - e^{-jw_1 t}}{2j}$ využijeme (3.33), (3.35) a platnost vztahů $|F(jw_1)| = |F(-jw_1)|$ a $\varphi(-w_1) = -\varphi(w_1)$:

Pro frekvenční odezvu v ustáleném stavu dostáváme vztah

$$y_v(t) = \frac{F(jw_1)e^{jw_1 t} - F(-jw_1)e^{-jw_1 t}}{2j} = |F(jw_1)| \frac{e^{j[w_1 t + \varphi(w_1)]} - e^{-j[w_1 t + \varphi(w_1)]}}{2j} = |F(jw_1)| \sin[w_1 t + \varphi(w_1)]$$

který odpovídá experimentálně zjištěné vynucené složce odezvy.

Frekvenční odezva je v ustáleném stavu pro libovolné $w_1 \in \langle 0, \infty \rangle$ plně charakterizována:

$$\begin{aligned} \text{Amplitudovým zesílením} \quad |F(jw_1)| &= \frac{A_y(w_1)}{A_u = 1} \\ \text{Fázovým posunem} \quad \varphi(w_1) &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F(jw_1)}{\operatorname{Re} F(jw_1)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

2/ Výpočet přirozené a vynucené složky odezvy pomocí rozkladu na parciální zlomky

Formálně budeme postupovat dle vztahu (3.13) pro určení přirozené a vynucené složky odezvy

$$Y(p) = F(p)U(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \frac{b_u(p)}{a_u(p)} = \frac{\hat{b}(p)}{Y_p(p)} + \frac{\hat{b}_u(p)}{Y_v(p)} \quad (3.37)$$

Protože frekvenční odezva je dána vynucenou složkou odezvy, není třeba provádět rozklad obrazu přirozené složky odezvy $Y_p(p)$, ale pouze obrazu vynucené složky $Y_v(p)$.

Pro L-obraz vstupního signálu dostáváme $U(p) = L\{1 \sin w_1 t\} = \frac{w_1}{p^2 + w_1^2} = \frac{b_u(p)}{a_u(p)}$ a po dosazení

do (3.37) lze obraz vynucené složky $Y_v(p)$ rozložit na parciální zlomky (nenásobné póly):

$$Y(p) = F(p)U(p) = F(p) \frac{w_1}{p^2 + w_1^2} = Y_p(p) + \frac{r_1}{p - jw_1} + \frac{r_2}{p + jw_1} \quad (3.38)$$

Určíme hodnoty reziduí r_1, r_2 :

$$r_1 = \lim_{p \rightarrow +j\omega_1} (p - j\omega_1) F(p) \frac{w_1}{(p + j\omega_1)(p - j\omega_1)} = \frac{F(j\omega_1)}{2j}$$

$$r_2 = \lim_{p \rightarrow -j\omega_1} (p + j\omega_1) F(p) \frac{w_1}{(p + j\omega_1)(p - j\omega_1)} = -\frac{F(-j\omega_1)}{2j}$$

a dosadíme do (3.38)

$$Y(p) = Y_p(p) + \frac{F(j\omega_1)}{2j} - \frac{F(-j\omega_1)}{2j} = Y_p(p) + \frac{1}{2j} \frac{[F(j\omega_1)(p + j\omega_1) - F(-j\omega_1)(p - j\omega_1)]}{p^2 + \omega_1^2} =$$

$$= Y_p(p) + \frac{F(j\omega_1) - F(-j\omega_1)}{2j} \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{F(j\omega_1) + F(-j\omega_1)}{2} \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$$

Po převodu komplexního čísla na polární tvar dostáváme

$$Y(p) = Y_p(p) + |F(j\omega_1)| \left[\frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j} \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2} \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \right]$$

a po zpětné transformaci do časové oblasti dostáváme výstupní odezvu ve stejném tvaru, který jsme zjistili experimentálně:

$$y(t) = y_p(t) + |F(j\omega_1)| [\sin \omega_1 t \cos \omega_1 t + \cos \omega_1 t \sin \omega_1 t] = y_p(t) + |F(j\omega_1)| \sin [\omega_1 t + \omega_1 t]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = 0 + \lim_{t \rightarrow \infty} |F(j\omega_1)| \sin [\omega_1 t + \omega_1 t] \quad (3.39)$$

Výpočet ilustruje také vliv přirozené složky $y_p(t)$, která u stabilního systému s rostoucím časem konverguje k nule a frekvenční odezva odpovídá vynucené složce odezvy.

Bez ohledu na to, jestli byla frekvenční odezva LDS určena experimentálně či prostřednictvím znalosti jeho frekvenčního přenosu, bude užitečné zvolit nějaké vhodné grafické znázornění frekvenční odezvy, které nazveme frekvenční charakteristikou LDS.

Frekvenční přenos $F(j\omega)$ jsme prozatím definovali vztahem $F(j\omega) = F(p)|_{p=j\omega}$ nebo jako Fourierovu transformaci impulsní funkce $g(t)$ a předpokládali jsme jeho znalost.

*Ukázali jsme, že frekvenční přenos $F(j\omega)$ je komplexní funkce reálného argumentu ω a při jeho změně v intervalu $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ bude $F(j\omega)$ opisovat křivku v komplexní rovině – **frekvenční charakteristiku**.*

Pro záporné frekvence $\omega \in \langle -\infty, 0 \rangle$ lze vypočítat její „zrcadlový obraz“, který je symetrický kolem reálné osy, neboť $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\omega t}$, $|F(j\omega)| = |F(-j\omega)|$ a $j(-\omega) = -j(\omega)$.

Jsou-li experimentálně určeny frekvenční odezvy pro nějaké vybrané frekvence z intervalu $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$, dostáváme odpovídající počet bodů frekvenční charakteristiky v komplexní rovině a teprve proložením nějaké křivky těmito body bychom získali aproximativní model frekvenčního přenosu $F(j\omega)$.

Dříve než se budeme podrobně zabývat frekvenčními charakteristikami LDS, ukážeme, že frekvenční přenos $F(j\omega)$ můžeme také definovat poměrem Fourierových obrazů výstupního a vstupního signálu, což je analogií definice přenosové funkce $F(p)$.

3.4. Fourierova transformace. Frekvenční přenos.

Jestliže nějaká funkce času $x(t)$ vyhovuje podmínkám

- $x(t)$ je jednoznačná a po úsecích hladká v každém konečném časovém intervalu
- $x(t) = 0$ pro $t < 0$
- $x(t)$ je absolutně integrovatelná: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$,

potom *Fourierova transformace* $x(t)$, formálně značená $X(j\omega) = F\{x(t)\}$, je definovaná

$$\underbrace{X(j\omega)}_{\text{obraz}} = F \left\{ \underbrace{x(t)}_{\text{originál}} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.40)$$

Zpětná Fourierova transformace $X(j\omega)$, formálně značená $x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\}$, je definovaná

$$\underbrace{x(t)}_{\text{originál}} = F^{-1} \left\{ \underbrace{X(j\omega)}_{\text{obraz}} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.41)$$

Všimněme si formální shody těchto definičních vztahů se vztahy pro Laplaceovu transformaci (2.1),(2.2), pokud za komplexní proměnnou p je uvažována pouze její imaginární část $p = j\omega$.

Aniž bychom zkoumali souvislosti obou transformací podrobněji, akceptujeme možnost použití substituce $p = j\omega$ a to jak při určování frekvenčních obrazů k daným časovým originálům, tak i při určování časových originálů k daným frekvenčním obrazům:

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} \equiv L\{x(t)\} \Big|_{p=j\omega} \quad \text{a} \quad x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} \equiv L^{-1}\{X(j\omega)\} \Big|_{j\omega=p} \quad (3.42)$$

Pro určování časového originálu $x(t)$ k danému obrazu $X(j\omega)$ můžeme opět využít rozklad na parciální zlomky. Například pro nenásobné póly p_i obrazu $X(j\omega) \Big|_{j\omega=p}$ určíme časový originál

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} \equiv L^{-1}\{X(j\omega)\} \Big|_{j\omega=p} = L^{-1} \left\{ \sum_i \frac{r_i}{p - p_i} \right\} = \sum_i r_i e^{p_i t} \quad (3.43)$$

Protože přenosová funkce $F(p)$ byla definována jako Laplaceův obraz impulsní funkce nebo jako poměr Laplaceových obrazů výstupní a vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách, můžeme analogicky definovat i frekvenční přenos $F(j\omega)$:

Frekvenční přenos $F(j\omega)$ lineárního systému lze definovat jako Fourierův obraz impulsní funkce $g(t)$

$$F(j\omega) = F\{g(t)\} \equiv L\{g(t)\} \Big|_{p=j\omega} \quad (3.44)$$

nebo jako poměr Fourierových obrazů výstupního signálu a vstupního signálu při nulových počátečních podmínkách:

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{F\{y(t)\}}{F\{u(t)\}} \equiv \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} \Big|_{p=j\omega} \quad (3.45)$$

Poznámka:

Připomeneme-li experimentální zjišťování frekvenční odezvy LDS na vstupní sinusový signál s jednotkovou amplitudou, potom snadno ověříme, že pro frekvenční přenos platí

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{L\{F(j\omega) \sin[\omega t + j(\omega)]\} \Big|_{p=j\omega}}{L\{\sin \omega t\}} = \frac{|F(j\omega)| L\{\sin \omega t \cos j(\omega) + \cos \omega t \sin j(\omega)\} \Big|_{p=j\omega}}{L\{\sin \omega t\}} = \\ &= |F(j\omega)| [\cos j(\omega) + j \sin j(\omega)] = |F(j\omega)| e^{j j(\omega)} \end{aligned}$$

3.5. Nyquistova a Bodeho frekvenční charakteristika

Nyquistova frekvenční charakteristika v komplexní rovině

Připomeňme si některé základní poznatky a vztahy pro výpočet frekvenční charakteristiky:

Frekvenční přenos $F(j\omega)$ je komplexní funkce reálného argumentu.

Pro každé reálné ω_i , $\omega_i \in \langle 0, \infty \rangle$ je frekvenční přenos $F(j\omega_i)$ komplexní číslo

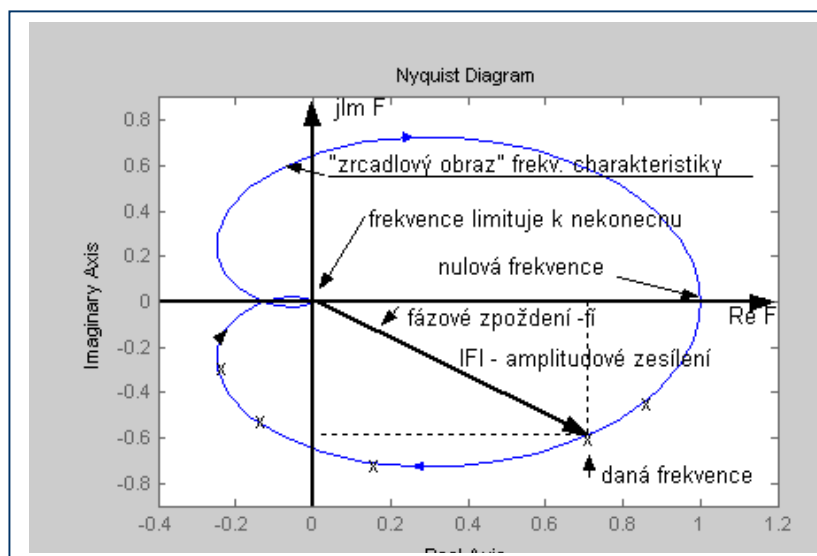
$F(j\omega_i) = \operatorname{Re} F(j\omega_i) + j \operatorname{Im} F(j\omega_i)$, které může být převedeno na polární tvar

$$F(j\omega_i) = |F(j\omega_i)| e^{j\varphi(\omega_i)}, \quad |F(j\omega_i)| = \sqrt{[\operatorname{Re} F(j\omega_i)]^2 + [\operatorname{Im} F(j\omega_i)]^2}, \quad \varphi(\omega_i) = \arctg \frac{\operatorname{Im} F(j\omega_i)}{\operatorname{Re} F(j\omega_i)}$$

Při změnách ω v intervalu $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ bude $F(j\omega)$ opisovat křivku v komplexní rovině – (Nyquistovu) frekvenční charakteristiku.

Nyquistova frekvenční charakteristika $F(j\omega)$ zobrazuje v komplexní rovině ($\operatorname{Re} F$, $j \operatorname{Im} F$) v závislosti na úhlové frekvenci ω , $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$, současně amplitudové zesílení $|F(j\omega)|$ a fázový posun $\varphi(\omega)$ harmonického signálu na výstupu systému vzhledem k signálu na vstupu systému.

Nyquistova charakteristika (a její „zrcadlový obraz“ pro $\omega \in (-\infty, 0)$) pro systém s přenosovou funkcí $F(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$ resp. s frekvenčním přenosem $F(j\omega) = F(p)|_{p=j\omega} = \frac{1}{(j\omega+1)^3}$ je znázorněna na následujícím obrázku. Pro frekvenci $\omega_1 = 0.2 \text{ rad/sec}$ je znázorněno odpovídající amplitudové zesílení $|F(j\omega_1)| = 0.94$ a fázové zpoždění výstupního signálu $\varphi(\omega_1) = -34^\circ$:



Dohoda:

Fázový předstih: $e^{+j\varphi(\omega)}$
kladná orientace je proti směru hodinových ručiček

Fázové zpoždění: $e^{-j\varphi(\omega)}$
záporná orientace je po směru hodinových ručiček

Výhodou Nyquistovy frekvenční charakteristiky v komplexní rovině je současné zobrazení amplitudového zesílení a fázového posunu výstupního harmonického signálu v závislosti na ω . Nevýhodou je, že se graf stává málo přehledný vlivem „zahušťování“ jednotlivých bodů frekvenční charakteristiky v oblasti vyšších frekvencí.

V následující tabulce uvedeme Nyquistovy frekvenční charakteristiky v komplexní rovině pro elementární členy:

1/ Proporcionální člen

$$F(j\omega) = K$$

2/ Integrátor

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

3/ Derivátor

$$F(j\omega) = j\omega$$

4/ Aperiodický člen 1. řádu

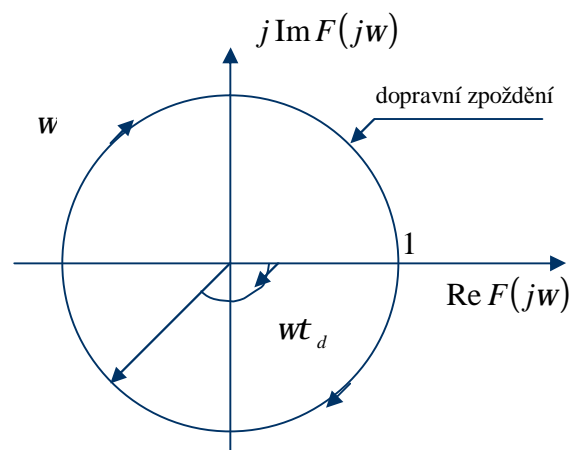
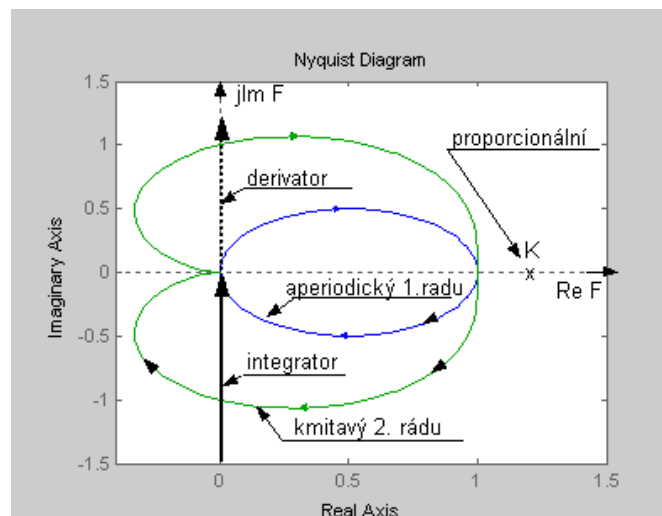
$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

5/ Kmitavý člen 2. řádu

$$F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}$$

6/ Dopravní zpoždění

$$F(j\omega) = 1e^{-j\omega t_d}$$



Poznámky k frekvenčním charakteristikám elementárních členů:

- 1/ Frekvenční charakteristika proporcionálního členu je bod na reálné ose s hodnotou K , $\forall \omega$.
- 2/ Frekvenční charakteristika integrátoru začíná při $\omega = 0$ na imaginární ose v $-j\infty$ a pro $\omega \rightarrow \infty$ směřuje po imaginární ose do nuly. (U systémů s astatismem 1. stupně bude $\text{Im } F(j0) = -j\infty$, $\text{Re } F(j0)$ však nulová není).
- 3/ Frekvenční charakteristika derivátoru začíná při $\omega = 0$ v nule a pro $\omega \rightarrow \infty$ směřuje po imag. ose do $+j\infty$.
- 4/ Frekvenční charakteristika aperiodického členu 1. řádu začíná při $\omega = 0$ na reálné ose (v bodě, který odpovídá statickému zesílení systému) a pro $\omega \rightarrow \infty$ směřuje do nuly (systémy se striktně ryzím přenosem přenášejí nekonečnou frekvenci s nulovým zesílením). Frekvenční charakteristika probíhá v prvním kvadrantu, maximální fázové zpoždění je -90° . V grafu je zobrazena i zrcadlová charakteristika pro záporné frekvence. Frekvenční charakteristika aperiodického členu 1. řádu s jednotkovým statickým zesílením je v komplexní rovině rovnicí kružnice (pro $\omega \geq 0$ půlkružnice) se středem $(0.5, j0)$ a poloměrem 0.5 pro libovolnou čas. konstantu T :

$$[\text{Re } F(j\omega) - 0.5]^2 + [\text{Im } F(j\omega)]^2 = (0.5)^2, \quad \omega \in (-\infty, +\infty)$$

- 5/ Frekvenční charakteristika kmitavého členu 2. řádu začíná při $\omega = 0$ na reálné ose (v bodě, který odpovídá statickému zesílení systému) a pro $\omega \rightarrow \infty$ směřuje do nuly (systémy se striktně ryzím přenosem přenášejí nekonečnou frekvenci s nulovým zesílením). V určitém pásmu frekvencí dochází ke zvýšení zesílení (viz rezonanční převýšení při rezonanční frekvenci). Frekvenční charakteristika probíhá ve dvou kvadrantech, maximální fázové zpoždění je -180° . V grafu je zobrazena i zrcadlová charakteristika pro záporné frekvence.

- 6/ Frekvenční charakteristika členu dopravního zpoždění má konstantní (jednotkové) zesílení pro všechny frekvence, fázové zpoždění narůstá lineárně s frekvencí.

Výpočet frekvenčních charakteristik v Matlabu: viz Nyquist.

Bodeho frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích:

Bodeho frekvenční charakteristiky zobrazují odděleně závislost amplitudového zesílení $|F(j\omega)|$ a fázového posunu $j(\omega)$ na úhlové frekvenci ω [rad/sec], vynášené v logaritmickém měřítku.

Zobrazujeme tedy: **Logaritmickou amplitudovou frekvenční charakteristiku (LAFCH) a Logaritmickou fázovou frekvenční charakteristiku (LFFCH)**

Na vodorovné ose je v obou charakteristikách úhlová frekvence ω rozdělena do dekád a zobrazena v logaritmickém měřítku. Zmíněné „zahušťování“ jednotlivých bodů Nyquistovy frekvenční charakteristiky v oblasti vyšších frekvencí je tak odstraněno.

Logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika (LAFCH)

Na svislou osu je vynášeno v lineárním měřítku buď amplitudové zesílení $|F(j\omega)|$ nebo častěji **amplitudový zisk**, definovaný jako $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)|$ v decibelech [dB].

Poznámka: Vynášení amplitudového zisku je výhodné zejména v případech, když je přenos vytvářen součinem dílčích přenosů resp. když jeho polynomy v čitateli a jmenovateli jsou součinem jednodušších polynomiálních faktorů. V takovém případě amplitudový zisk nahradí nelineární operaci „součin“ součtem a nelineární operaci „dělení“ rozdílem, což značně zjednoduší např. návrh korekčních článků v LAFCH (viz LS2) či určení aproximovaného tvaru LAFCH pro obecný tvar přenosu (viz dále).

Logaritmická fázová frekvenční charakteristika (LFFCH)

Na svislou osu vynášen v lineárním měřítku fázový posun $j(\omega)$ ve stupních $[^\circ]$.

Bodeho frekvenční charakteristiky pro elementární členy

Pro grafické znázornění LAFCH a LFFCH přenosů $F(j\omega)$ elementárních členů vyjdeme ze základních vztahů pro výpočet $|F(j\omega)|$ a $j(\omega)$:

$$F(j\omega) = \operatorname{Re} F(j\omega) + j \operatorname{Im} F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$
$$|F(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} F(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} F(j\omega)]^2}, \quad j(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F(j\omega)}{\operatorname{Re} F(j\omega)} \quad (3.46)$$

1/ Proporcionální člen: $F(j\omega) = K$

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = K, \quad \operatorname{Im} F(j\omega) = 0; \quad \forall \omega$$

$$\text{Amplitudové zesílení: } |F(j\omega)| = K, \quad \forall \omega$$

$$\text{Fázový posun: } j(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F(j\omega)}{\operatorname{Re} F(j\omega)} = 0^\circ, \quad \forall \omega$$

$$\text{Polární tvar: } F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = K e^{j0^\circ}$$

$$\text{LAFCH: } |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log K, \quad \forall \omega$$

$$\text{LFFCH: } j(\omega) = 0^\circ, \quad \forall \omega$$

2/ Integrátor: $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$$\operatorname{Re} F(j\omega) = 0, \quad \forall \omega; \quad \operatorname{Im} F(j\omega) = -\frac{1}{\omega}$$

$$\text{Amplitudové zesílení: } |F(j\omega)| = \frac{1}{\omega},$$

$$\text{Fázový posun: } j(w) = \arctg \frac{\text{Im } F(jw)}{\text{Re } F(jw)} = -90^0; \forall w$$

$$\text{Polární tvar: } F(jw) = |F(jw)| e^{-j(w)} = \frac{1}{w} e^{-j90^0} \quad (\text{všimněme si, že } j^k = e^{jk\frac{\pi}{2}}; \text{ zde pro } k = -1)$$

$$\text{LAFCH: } |F(jw)|_{dB} = 20 \log |F(jw)| = 20 \log \frac{1}{w} = 20 \log 1 - 20 \log w = -20 \log w$$

Je to rovnice přímky, která při $w = 1$ prochází osou 0dB se sklonem -20dB/dekádu, neboť pro 10x větší w dostáváme $|F(jw)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{10w} = -20 - 20 \log w$

Pro $F(jw) = \frac{K}{jw}$, $K \neq 1$ je přímka LAFCH posunuta o $20 \log K$.

$$\text{LFFCH: } j(w) = -90^0, \forall w$$

3/ Derivátor: $F(jw) = jw$

$$\text{Re } F(jw) = 0, \forall w; \quad \text{Im } F(jw) = w$$

$$\text{Amplitudové zesílení: } |F(jw)| = w,$$

$$\text{Fázový posun: } j(w) = \arctg \frac{\text{Im } F(jw)}{\text{Re } F(jw)} = +90^0; \forall w$$

$$\text{Polární tvar: } F(jw) = |F(jw)| e^{+j(w)} = w e^{+j90^0}$$

$$\text{LAFCH: } |F(jw)|_{dB} = 20 \log |F(jw)| = 20 \log w$$

Je to rovnice přímky, která při $w = 1$ prochází osou 0dB se sklonem +20dB/dekádu, neboť pro 10x větší w dostáváme $|F(jw)|_{dB} = 20 \log 10w = +20 + 20 \log w$

Pro $F(jw) = Kjw$, $K \neq 1$ je přímka LAFCH posunuta o $20 \log K$.

$$\text{LFFCH: } j(w) = +90^0, \forall w$$

4/ Aperiodický člen 1. řádu: $F(jw) = \frac{1}{jwT + 1}$ „zlomová frekvence“: $w_z = \frac{1}{T}$

$$F(jw) = \frac{1}{jwT + 1} = \frac{1 - jwT}{1 + w^2T^2} = \frac{1 - j \frac{w}{w_z}}{1 + \frac{w^2}{w_z^2}} = \text{Re } F(jw) + j \text{Im } F(jw)$$

$$\text{Re } F(jw) = \frac{1}{1 + w^2T^2} = \frac{1}{1 + \frac{w^2}{w_z^2}}; \quad \text{Im } F(jw) = \frac{-wT}{1 + w^2T^2} = \frac{-\frac{w}{w_z}}{1 + \frac{w^2}{w_z^2}}$$

$$\text{Amplitudové zesílení: } |F(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2T^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{w^2}{w_z^2}}}$$

$$\text{Fázový posun: } j(w) = \arctg \frac{\text{Im } F(jw)}{\text{Re } F(jw)} = \arctg(-wT) = \arctg\left(-\frac{w}{w_z}\right)$$

Polární tvar: $F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} e^{j\arctg(-\omega T)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_z^2}}} e^{j\arctg\left(-\frac{\omega}{\omega_z}\right)}$

LAFCH: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log|F(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_z^2}}}$; $|F(j\omega_z)|_{dB} = -3dB$

LFFCH: Pro $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ dostáváme $\varphi(\omega) \in \langle 0^\circ, -90^\circ \rangle$; $\varphi(\omega_z) = -45^\circ$

Pro zjednodušené zakreslení LAFCH používáme přímkovou aproximaci:

Pro $\omega \ll \omega_z$: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log|F(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_z^2}}} \cong 0dB$
zanedbáme

Pro $\omega \gg \omega_z$: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_z^2}}} \cong 20 \log \omega_z - 20 \log \omega$

(rovnice přímky, která protíná osu 0dB při $\omega = \omega_z$ se sklonem -20 dB/dekádu)

Pro $\omega = \omega_z$: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_z^2}}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$

(Při $\omega = \omega_z$ nastává největší rozdíl mezi skutečným a aproximovaným průběhem LAFCH!)

5/ Kmitavý člen 2. řádu: $F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2x\omega_n\omega + \omega_n^2}$; $x \in \langle 0,1 \rangle, \omega_n > 0$

$F(j\omega) = \frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + j2x\frac{\omega}{\omega_n} + 1}$; „zlomová frekvence“: $\omega_z = \omega_n$

$F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2x\omega_n\omega} = \frac{\omega_n^2[(\omega_n^2 - \omega^2) - j2x\omega_n\omega]}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2x\omega_n\omega)^2} = \text{Re } F(j\omega) + j \text{Im } F(j\omega)$

$\text{Re } F(j\omega) = \frac{\omega_n^2[(\omega_n^2 - \omega^2)]}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2x\omega_n\omega)^2}$; $\text{Im } F(j\omega) = -\frac{2x\omega_n^3\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2x\omega_n\omega)^2}$

Amplitudové zesílení: $|F(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2x\omega_n\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2x\omega}{\omega_n}\right)^2}}$

Fázový posun: $\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im } F(j\omega)}{\text{Re } F(j\omega)} = \arctg\left(-\frac{2x\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$

Polární tvar:
$$F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2x\omega_n\omega)^2}} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2x\omega}{\omega_n}\right)^2}} e^{j\varphi(\omega)}$$

LAFCH:
$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2x\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Pro $\omega = \omega_n$: $|F(j\omega_n)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega_n)| = 20 \log \frac{1}{2x} = -20 \log(2x)$ („zlomová“ frekvence)

Pro $x = 0.5$ je $|F(j\omega_n)|_{dB} = 0 \text{ dB}$.

Pro $x < 0.5$ se amplitudový zisk zvyšuje, pro $x > 0.5$ se amplitudový zisk snižuje.

LFFCH: Pro $\omega \in (0, \omega_n)$ je $\varphi(\omega) \in (0^\circ, -90^\circ)$; $\varphi(\omega_n) = -90^\circ$

Pro $\omega \in (\omega_n, \infty)$ je $\varphi(\omega) \in (-90^\circ, -180^\circ)$;

Pro zjednodušené zakreslení LAFCH používáme přímkovou aproximaci:

Pro $\omega \ll \omega_n$: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2x\omega}{\omega_n}\right)^2}} \cong 0 \text{ dB}$

Pro $\omega \gg \omega_n$: $|F(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}} = 40 \log \omega_n - 40 \log \omega$

(rovnice přímkou, která protíná osu 0dB při $\omega = \omega_n$ se sklonem -40 dB/dekádu)

Pro $\omega = \omega_n$: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{2x} = -20 \log(2x)$

(Při $\omega = \omega_n$ nastává největší rozdíl mezi skutečným a aproximovaným průběhem LAFCH!)

5/ Dopravní zpoždění: $F(j\omega) = 1e^{-j\omega t_d}$

Frekvenční přenos je již v polárním tvaru.

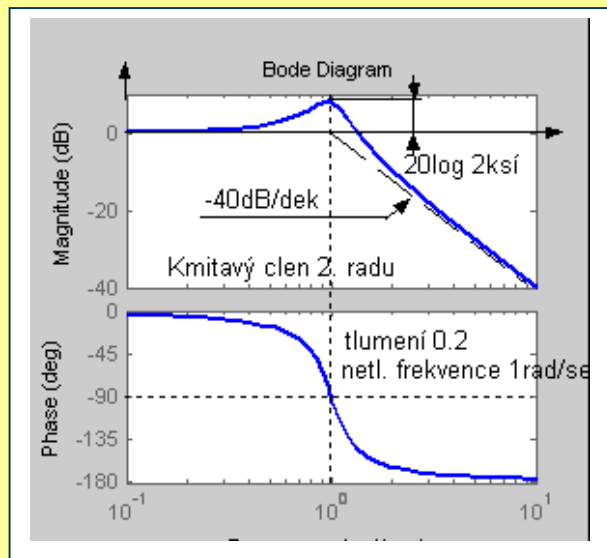
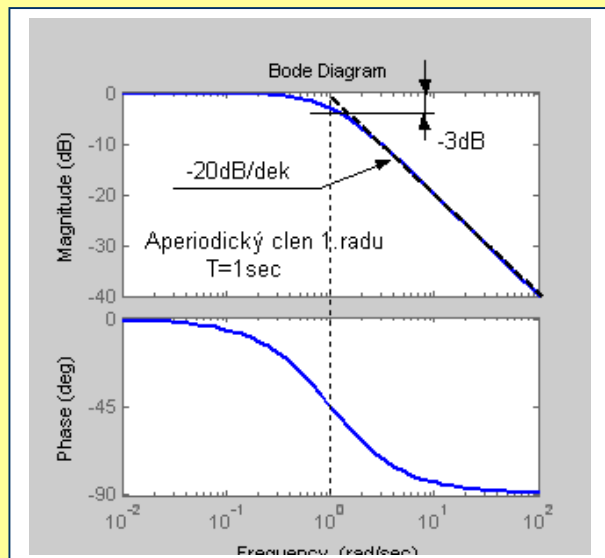
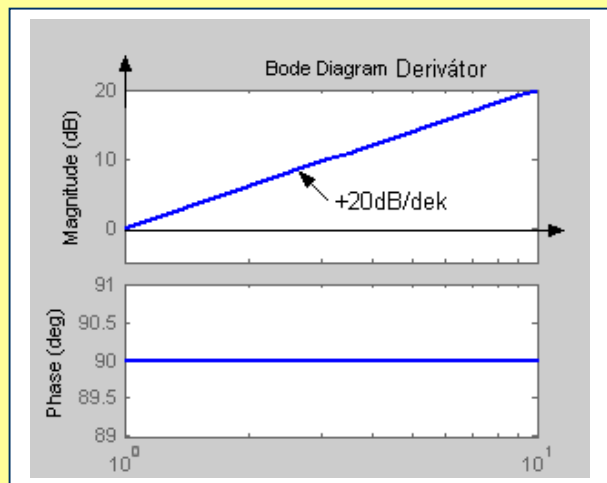
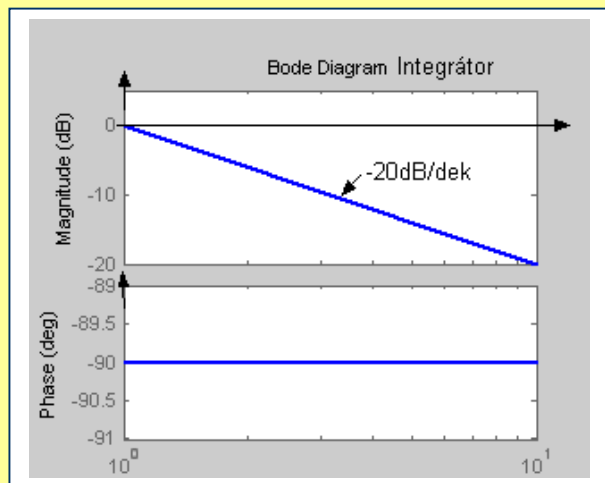
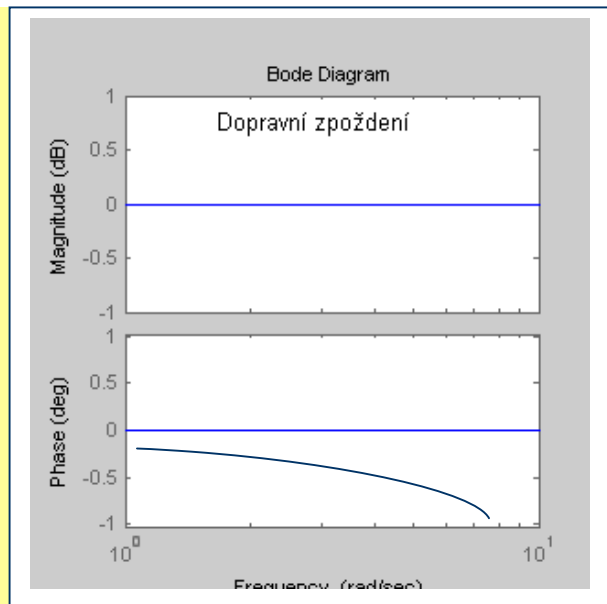
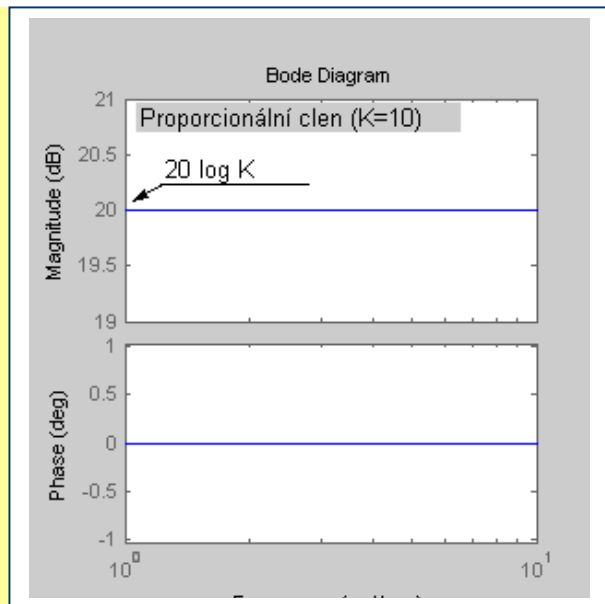
Amplitudové zesílení: $|F(j\omega)| = 1, \forall \omega$

Fázový posun: $\varphi(\omega) = -\omega t_d$

LAFCH: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log 1 = 0 \text{ dB}, \forall \omega$

LFFCH: $\varphi(\omega) = -\omega t_d$ (frekvence je vynášena logaritmičticky, není to příčka...)

Bodeho frekvenční charakteristiky elementárních členů:



3.6. Frekvenční charakteristiky pro obecný tvar přenosu

Vyjděme ze skutečnosti, že nuly i póly obecné přenosové funkce $F(p)$ mohou být ryze imaginární, reálné (stabilní či nestabilní) či komplexně sdružené (stabilní či nestabilní) a přenosová funkce může obsahovat dopravní zpoždění.

Z uvedeného vyplývá, že polynomy v čitateli resp. jmenovateli obecné přenosové funkce mohou být rozloženy na součin polynomů (*polynomiálních faktorů*), jejichž kořeny jsou nuly resp. póly odpovídajícího typu.

Obecný tvar přenosové funkce $F(p)$ resp. frekvenčního přenosu $F(j\omega)$:

$$F(p) = Kp^k \frac{b_1(p)b_2(p)\dots}{a_1(p)a_2(p)\dots} e^{-pt_d} \quad \text{resp.} \quad F(j\omega) = K(j\omega)^k \frac{b_1(j\omega)b_2(j\omega)\dots}{a_1(j\omega)a_2(j\omega)\dots} e^{-j\omega t_d} \quad (3.47)$$

kde

k je celé číslo ($k = 0$ přenos bez astatismu, $k < 0$ stupeň astatismu, $k > 0$ stupeň derivace) polynomiální faktory $b_i(p), a_i(p)$ resp. $b_i(j\omega), a_i(j\omega)$ v čitateli či jmenovateli přenosu mohou být buď 1. stupně nebo 2. stupně

$$K \text{ je zesílení systému určené ze vztahu: } K = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^k} F(p), \quad K = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{(j\omega)^k} F(j\omega) \quad (3.48)$$

Stabilní polynomiální faktor 1. stupně se zlomovou frekvencí $\omega_z = \frac{1}{T}$:

$$(pT + 1) \quad \text{resp.} \quad (j\omega T + 1) = \left(j \frac{\omega}{\omega_z} + 1 \right) \quad (3.49)$$

Stabilní polynomiální faktor 2. stupně se zlomovou frekvencí ω_n :

$$(p^2 + 2\alpha\omega_n p + \omega_n^2) \quad \text{resp.} \quad \left[(j\omega)^2 + j2\alpha\omega_n \omega + \omega_n^2 \right] = \omega_n^2 \left[\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + j2\alpha \frac{\omega}{\omega_n} + 1 \right] \quad (3.50)$$

Faktor Kp^k resp. $K(j\omega)^k$ nazveme “*nízkofrekvenčním faktorem*” (jeho LAFCH při $k \neq 0$ mění svůj sklon již od nulové frekvence, kdežto faktory 1. a 2. stupně při použití přímkové aproximace až od zlomové frekvence).

Stabilní polynomiální faktor 1. stupně má ve jmenovateli přenos stabilního aperiodického členu 1. řádu a stabilní polynomiální faktor 2. stupně má ve jmenovateli přenos stabilního kmitavého členu 2. řádu.

Nízkofrekvenční faktor s $k = 0$ má proporcionální člen, nízkofrekvenční faktor s $k = -1$ má integrátor a nízkofrekvenční faktor s $k = +1$ má derivátor.

Elementární členy však nemají žádné nuly.

Prozatím víme, že pro stabilní LDS můžeme jednotlivé body frekvenční charakteristiky určit buď *experimentálně* nebo *výpočtem* dle vztahů (3.46) a následně je graficky zobrazit jako Nyquistovy či Bodeho frekvenční charakteristiky. Pokud LDS není stabilní, nelze frekvenční charakteristiku odměřit, výpočet však formálně můžeme provést. Frekvenčním charakteristikám pro LDS s nestabilními nulami a/nebo póly (“*neminimálně-fázové systémy*”) se budeme věnovat později.

Pro výpočet frekvenčních charakteristik využijeme polárního tvaru jednotlivých faktorů $F(j\omega)$:

$$F(j\omega) = K(j\omega)^k \frac{b_1(j\omega)b_2(j\omega)\dots}{a_1(j\omega)a_2(j\omega)\dots} e^{-j\omega t_d} = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.51)$$

kde $b_i(j\omega) = |b_i(j\omega)| e^{j\varphi_{b_i}(\omega)}$; $|b_i(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} b_i(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} b_i(j\omega)]^2}$, $\varphi_{b_i}(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} b_i(j\omega)}{\operatorname{Re} b_i(j\omega)}$

$a_i(j\omega) = |a_i(j\omega)| e^{j\varphi_{a_i}(\omega)}$; $|a_i(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} a_i(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} a_i(j\omega)]^2}$, $\varphi_{a_i}(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} a_i(j\omega)}{\operatorname{Re} a_i(j\omega)}$

a $K(j\omega)^k = K\omega^k (j)^k = K\omega^k e^{j\frac{k\pi}{2}}$ (3.52)

Dostáváme tak frekvenční přenos ve tvaru

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = K\omega^k \frac{|b_1(j\omega)||b_2(j\omega)|\dots}{|a_1(j\omega)||a_2(j\omega)|\dots} e^{j\left(\frac{k\pi}{2} + \varphi_{b_1}(\omega) + \varphi_{b_2}(\omega) + \dots - \varphi_{a_1}(\omega) - \varphi_{a_2}(\omega) - \dots - \omega t_d\right)} \quad (3.53)$$

amplitudové – zesílení

který lze bezprostředně použít pro výpočet Nyquistovy frekvenční charakteristiky.

Určení Bodeho frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích.

LAFCH pro obecný tvar přenosu v polárním tvaru je složena z dílčích frekvenčních charakteristik jednotlivých faktorů (operaci násobení nahradil součet a dělení rozdíl):

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)| = 20 \log K + k 20 \log \omega + 20 \log |b_1(j\omega)| + 20 \log |b_2(j\omega)| + \dots - 20 \log |a_1(j\omega)| - 20 \log |a_2(j\omega)| - \dots \quad (3.54)$$

LFFCH pro obecný tvar přenosu v polárním tvaru je ve tvaru

$$\varphi(\omega) = \frac{k\pi}{2} + \varphi_{b_1}(\omega) + \varphi_{b_2}(\omega) + \dots - \varphi_{a_1}(\omega) - \varphi_{a_2}(\omega) - \dots - \omega t_d \quad (3.55)$$

Pro zjednodušené zakreslení LAFCH používáme opět přímkovou aproximaci. Získáme ji součtem přímkových aproximací LAFCH jednotlivých faktorů:

LAFCH pro nízkofrekvenční faktor:

$$|K(j\omega)^k|_{dB} = 20 \log(K\omega^k) = 20 \log K + k 20 \log \omega$$

Je to rovnice přímky, která prochází při $\omega = 1$ rad/sec bodem $20 \log K$ se sklonem $k 20$ dB/dek

LFFCH pro nízkofrekvenční faktor: $\varphi(\omega) = k \frac{\pi}{2}$

LAFCH pro stabilní faktor 1. stupně

Je-li faktor (3.49) ve jmenovateli přenosu, jedná se vlastně o aproximaci LAFCH aperiodického členu 1. řádu:

Pro $\omega \ll \omega_z$: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{|(j\omega T + 1)|} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}}} \cong 0 \text{ dB}, \quad \omega_z = \frac{1}{T}$

Pro $\omega \gg \omega_z$: $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}}} \cong 20 \log \omega_z - 20 \log \omega$

(rovnice přímky, která protíná osu 0dB při $\omega = \omega_z$ se sklonem -20 dB/dekádu)

$$\text{Pro } w = w_z: |F(jw)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{w^2}{w_z^2}}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$$

Je-li faktor (3.49) ve jmenovateli přenosu, LAFCH je přímka, která protíná osu 0dB při $w = w_z$ se sklonem -20 dB/dekádu.

Je-li faktor (3.49) v čitateli přenosu, snadno odvodíme, že LAFCH je přímka, která protíná osu 0dB při $w = w_z$ se sklonem +20 dB/dekádu („zrcadlový obraz“ vzhledem k ose 0dB).

LFFCH pro stabilní faktor 1. stupně

Pro $w \in \langle 0, \infty \rangle$ je $j(w) \in \langle 0^0, -90^0 \rangle$; $j(w_z) = -45^0$ (faktor ve jmenovateli)

Pro $w \in \langle 0, \infty \rangle$ je $j(w) \in \langle 0^0, +90^0 \rangle$; $j(w_z) = +45^0$ (faktor v čitateli – „zrcadlový obraz“)

LAFCH pro stabilní faktor 2. stupně

Je-li faktor (3.50) ve jmenovateli přenosu, můžeme jej považovat za aproximaci LAFCH kmitavého členu 2. řádu s jednotkovým statickým zesílením:

$$\text{Pro } w \ll w_n: |F(jw)|_{dB} = 20 \log \frac{w_n^2}{|(jw)^2 + j2xw_n w + w_n^2|} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2xw}{w_n}\right)^2}} \cong 0dB$$

$$\text{Pro } w \gg w_n: |F(jw)|_{dB} \cong 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w^2}{w_n^2}\right)^2}} = 40 \log w_n - 40 \log w$$

(rovnice přímky, která protíná osu 0dB při $w = w_n$ se sklonem -40 dB/dekádu)

$$\text{Pro } w = w_n: |F(jw)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{2x} = -20 \log(2x)$$

Je-li faktor (3.50) ve jmenovateli přenosu, LAFCH je přímka, která protíná osu 0dB při $w = w_n$ se sklonem -40 dB/dekádu.

Je-li faktor (3.50) v čitateli přenosu, LAFCH je přímka, která protíná osu 0dB při $w = w_n$ se sklonem +40 dB/dekádu („zrcadlový obraz“ vzhledem k ose 0dB).

LFFCH pro stabilní faktor 2. stupně

Pro $w \in \langle 0, w_n \rangle$ je $j(w) \in \langle 0^0, -90^0 \rangle$; $j(w_n) = -90^0$

Pro $w \in (w_n, \infty)$ je $j(w) \in \langle -90^0, -180^0 \rangle$; (faktor ve jmenovateli)

Pro $w \in \langle 0, w_n \rangle$ je $j(w) \in \langle 0^0, +90^0 \rangle$; $j(w_n) = +90^0$

Pro $w \in (w_n, \infty)$ je $j(w) \in \langle +90^0, +180^0 \rangle$; (faktor v čitateli – „zrcadlový obraz“)

Pokud má přenos dopravní zpoždění, je ovlivněn průběh fáze, ale nedochází ke změně LAFCH.

Postup při konstrukci přímkové aproximace LAFCH:

1/ Daný přenos rozložíme na faktory 1. a 2. stupně v čitateli a jmenovateli.

2/ Určíme zesílení a nízkofrekvenční faktor Kp^k resp. $K(jw)^k$ - viz (3.47),(3.48).

3/ Pro jednotlivé faktory 1. a 2. stupně v čitateli a jmenovateli přenosu určíme zlomové frekvence a seřadíme je vzestupně.

- 4/ Konstrukci přímkové aproximace LAFCH začínáme od nízkofrekvenčního faktoru zakreslením přímky se sklonem $k=20\text{ dB/dek}$, která při $\omega = 1\text{ rad/sec}$ prochází bodem $20\log K$.
- 5/ Po této přímce postupujeme ve smyslu rostoucí frekvence až do nejbližší zlomové frekvence. Zjistíme, jakému faktoru zlomová frekvence odpovídá a zda je faktor v čitateli či jmenovateli přenosu. Od této zlomové frekvence navazujeme přímku se sklonem odpovídajícím zjištěnému faktoru atd.
- 6/ Ve zlomových frekvencích je možné respektovat známé velikosti odchylky aproximovaného průběhu od skutečného.

Při konstrukci LFFCH sčítáme fázové charakteristiky jednotlivých faktorů.

Příklad 3.4.:

Zakreslete přímkovou aproximaci LAFCH pro LDS s přenosem $F(p) = \frac{5 \cdot 10^4 (p + 100)}{p(2p^2 + 6p + 50)(p + 1000)}$
a porovnejte průběh se skutečným průběhem (Matlab: Bode)

Řešení:

1/ Přenosová funkce a frekvenční přenos s faktory 1. a 2. stupně:

$$F(p) = \frac{5 \cdot 10^6 (0.01p + 1)}{2 \cdot 10^3 p (p^2 + 3p + 25) (0.001p + 1)} \quad (\text{faktor 2. stupně je } p^2 + 2\alpha\omega_n p + \omega_n^2)$$

$$F(j\omega) = \frac{5 \cdot 10^6 (j\omega 0.01 + 1)}{2 \cdot 10^3 j\omega [(j\omega)^2 + j3\omega + 25] (j\omega 0.001 + 1)}$$

2/ Nízkofrekvenční faktor $K(j\omega)^k$: $k = -1$, $K = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{(j\omega)^k} F(j\omega) = 100 \rightarrow K(j\omega)^k = 100(j\omega)^{-1}$

3/ Zlomová frekvence čitatele: $\omega_z = \frac{1}{0.01} = 100\text{ rad/sec}$

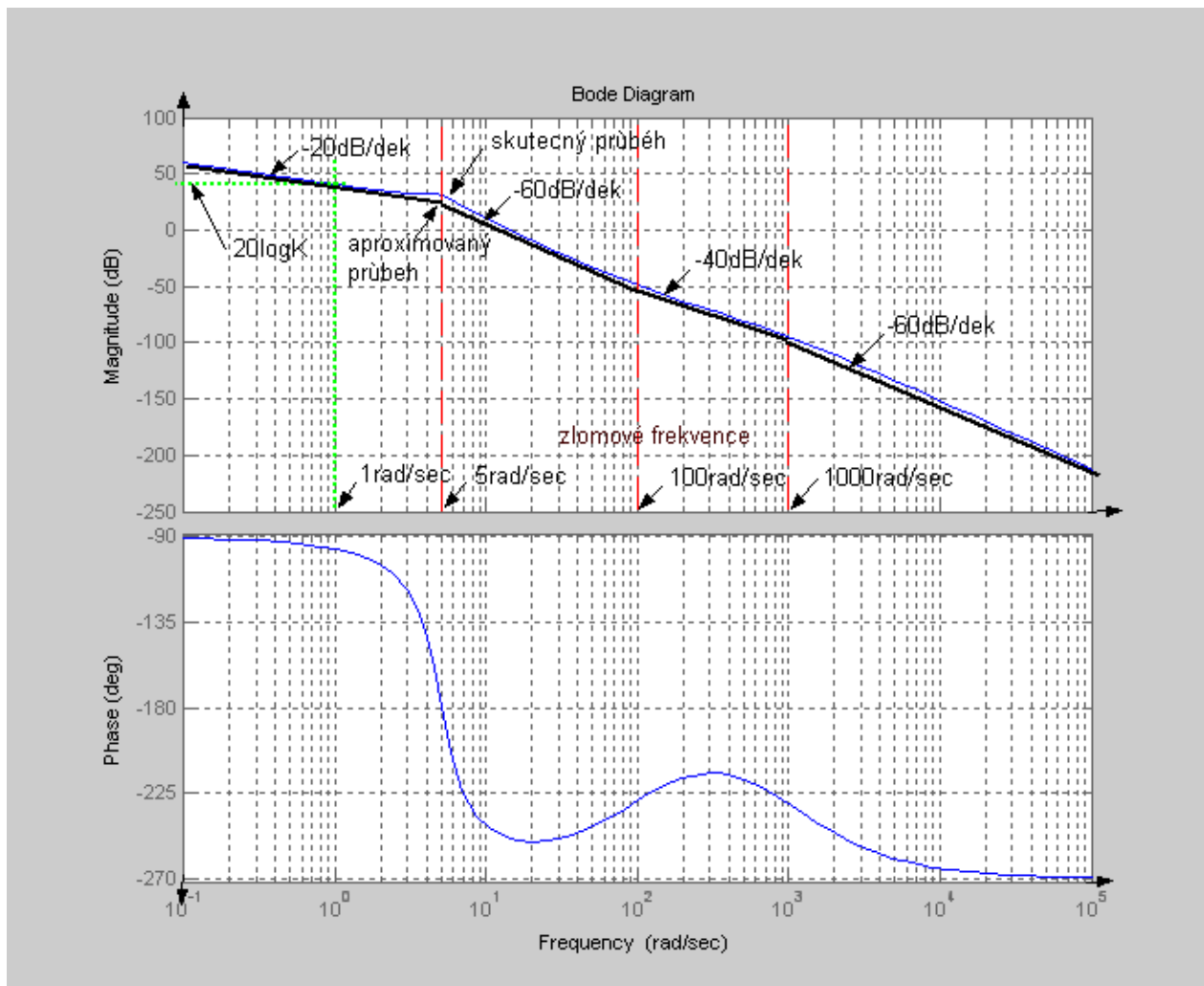
Zlomové frekvence jmenovatele: $\omega_n = 5\text{ rad/sec}$, $\omega_z = \frac{1}{0.001} = 1000\text{ rad/sec}$

4/ Přímka nízkofrekvenčního faktoru prochází při $\omega = 1\text{ rad/sec}$ bodem $20\log 100 = 40\text{ dB}$ se sklonem -20 dB/dek

5/ Při zlomové frekvenci $\omega_n = 5\text{ rad/sec}$... dochází k poklesu o dalších -40 dB/dek ,

Při zlomové frekvenci $\omega_z = 100\text{ rad/sec}$... dochází k nárůstu o $+20\text{ dB/dek}$

Při zlomové frekvenci $\omega_n = 1000\text{ rad/sec}$... dochází k poklesu o -20 dB/dek .



Všimněme si průběhu LFFCH (Matlab). Protože se jedná o systém s astatismem 1.řádu, začíná LFFCH s fázovým zpožděním -90° . Protože přenosová funkce má relativní řád 3, fázové zpoždění může dosáhnout maximálně -270° .

Poznámka: Je-li pro neznámý systém znám průběh jeho LAFCH, můžeme z přímkové aproximace zpětně určit přibližný tvar jeho přenosové funkce ze zlomových frekvencí.....

Význam frekvenčního přístupu k analýze a syntéze dynamických systémů.

Frekvenční odezvy lze určit experimentálně s použitím signálních generátorů a spektrálních analyzátorů. Analýza frekvenčních odezev nám poskytne nejen informaci o dynamických vlastnostech systému, ale je i základem frekvenčních metod návrhu regulátorů či kompenzátorů s cílem zlepšení chování systému. Frekvenční metody se začaly používat nejprve v komunikačních systémech a řada termínů přešla i do regulační techniky: **šířka pásma regulace, rezonanční převýšení, bezpečnost v zesílení a ve fázi** a další, se kterými se ještě setkáme.

V komunikačních systémech je přenášená informace obecně omezena do úzkého pásma frekvencí v okolí nosné frekvence, kdežto v regulační technice je primárním zájmem navrhnout regulační obvod tak, aby byl schopen přesně sledovat i rychlé změny zadávaného (referenčního) signálu. Ve frekvenční interpretaci to znamená, že je nutné navrhnout regulační obvod tak, aby měl co největší šířku pásma regulace, definovanou první frekvencí, kdy amplitudový zisk klesne o 3 decibely pod úroveň amplitudového zisku při nulové frekvenci.

Bode definoval výkonový zisk poměrem signálového výkonu na výstupu a vstupu systému jako

$$Z[\text{dB}] = 10 \log \left(\frac{P_{\text{výstupní}}}{P_{\text{vstupní}}} \right)$$

Považujeme-li signálový výkon za veličinu úměrnou kvadrátu amplitudy signálu, dostáváme se k definici amplitudového zisku

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right|$$

Protože šířka pásma regulace byla z fyzikálního pohledu definována první frekvencí, kde výkonový zisk klesne na jednu polovinu výkonového zisku při nulové frekvenci, v amplitudovém zesílení to znamená pokles na $\frac{1}{\sqrt{2}}$, t.j. na 70,7% a v amplitudovém zisku pokles o 3 decibely.

3.7. Minimálně-fázové a neminimálně-fázové systémy.

Pro *stabilní systémy se stabilními nulami* odvodil Bode vztah mezi průběhem LAFCH a LFFCH, který lze aproximativně vyjádřit vztahem

$$\arg F(j\omega) \cong \frac{p}{2} \frac{d \log |F(j\omega)|}{d \log \omega} = k \frac{p}{2} \quad (3.56)$$

Průběh fáze je tedy vázán na sklon LAFCH a je určen příslušným násobkem $k \frac{p}{2}$. Takové systémy nazýváme *minimálně-fázové systémy*, resp. systémy s minimální hodnotou fázového zpoždění. Systémy, u kterých dochází k většímu fázovému zpoždění nazýváme *neminimálně-fázové systémy*, neplatí pro ně Bodeův vztah a lze je rozdělit do tří skupin:

1. systémy s *nestabilními nulami*
2. systémy s *nestabilními póly*
3. systémy s *dopravním zpožděním*

Průběh LAFCH je u minimálně a neminimálně-fázových systémů shodný.

1. Systémy s *nestabilními nulami*

Uvažujme lineární dynamický systém popsaný přenosovou funkcí

$$F(p) = K \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (3.57)$$

kde z_j jsou nuly $F(p)$, p_i jsou póly $F(p)$ a K je parametr, který lze vyjádřit pomocí statického zesílení K_s

$$K_s \equiv F(0) = K \frac{\prod_{j=1}^m (-z_j)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)} \Rightarrow K = K_s \frac{\prod_{i=1}^n (-p_i)}{\prod_{j=1}^m (-z_j)} \quad (3.58)$$

Pro ilustraci vlivu *nestabilních nul* na průběh fáze budeme pro jednoduchost uvažovat přenosovou funkci (3.57) s jednou nestabilní nulou z_k , $z_k > 0$.

Přenosová funkce $F(p)$ s polynomiálním faktorem $(p - z_k)$ v čitateli přenosu může být zapsána ve faktorizovaném tvaru sestávajícím z neminimálně-fázové a minimálně-fázové části:

$$F(p) = F_{mf}(p) F_{mf}(p) \quad (3.59)$$

Stabilním členem $p + z_k$ rozšíříme čitatele přenosu minimálně-fázové části $F_{mf}(p)$ a zavedeme jej také do jmenovatele neminimálně-fázové části přenosu $F_{nmf}(p)$, protože stabilní póly vůči stabilním nulám mohou být kráceny.

Faktorizace je tedy provedena tak, že neminimálně-fázová část má tvar t.zv. **“all-pass” filtru**

$$F_{nmf}(p) = \frac{p - z_k}{p + z_k} \quad (3.60)$$

který má jednotkové zesílení pro všechny frekvence, ale zavádí výrazné fázové zpoždění.

Z důvodu ilustrativnosti fázového zpoždění (Matlab naznačuje fázový předstih) je pro výpočet fázového zpoždění vhodné v čitateli all-pass filtru s nestabilní nulou dočasně změnit znaménko, abychom převedli přenos do kvadrantů umožňujících interpretaci fázového zpoždění.

Na původní tvar přenos převedeme následným přenásobením -1 , $-1 = 1e^{-p}$.

Změna znaménka v čitateli zesílení neovlivňuje, ale převádí fázi do kvadrantu, který ilustruje, že tento člen zavádí pro $w \in [0, \infty)$ **dodatečné fázové zpoždění v intervalu $(0^0, -180^0)$ k fázovému zpoždění přenosu $F_{mf}(p)$, přičemž $j(z_k) = -90^0$** . [Matlab: fáze v intervalu $(+180^0, 0^0)$!!]

Větší fázové zpoždění u neminimálně-fázových systémů snižuje bezpečnost ve fázi, zkracuje šířku pásma regulace, doba regulace se oproti minimálně-fázovým systémům prodlužuje a obecně se tyto systémy obtížně regulují.

Příklad 3.5 :

Uvažujme přenos neminimálně-fázového systému $F(p) = \frac{10(p-1)}{p(p+10)}$

a přenos minimálně-fázového systému $F_1(p) = \frac{10(p+1)}{p(p+10)}$

Přenosovou funkci neminimálně-fázového systému přepíšeme do faktorizovaného tvaru

$$F(p) = F_{nmf}(p)F_{mf}(p) = \frac{p-1}{p+1} \frac{10(p+1)}{p(p+10)} = -\frac{-p+1}{p+1} \frac{10(p+1)}{p(p+10)},$$

ze kterého je zřejmé, že systém s nestabilní nulou bude vykazovat větší fázové zpoždění, než systém se stejnou stabilní nulou.

2. Systémy s nestabilními póly

Pro ilustraci vlivu nestabilních pólů na průběh fáze budeme pro jednoduchost uvažovat přenosovou funkci (3.57) s jedním nestabilním pólem p_k .

Přenosová funkce $F(p)$ s polynomiálním faktorem $(p - p_k)$ ve jmenovateli přenosu může být zapsána ve faktorizovaném tvaru sestávajícím z neminimálně-fázové a minimálně-fázové části:

$$F(p) = F_{nmf}(p)F_{mf}(p) \quad (3.61)$$

Stabilním členem $(p + p_k)$ rozšíříme jmenovatele přenosu minimálně-fázové části $F_{mf}(p)$ a zavedeme jej také do čitatele neminimálně-fázové části přenosu $F_{nmf}(p)$, protože stabilní póly vůči stabilním nulám mohou být kráceny.

Faktorizace je tedy provedena tak, že neminimálně-fázová část má opět tvar **“all-pass” filtru**:

$$F_{nmf}(p) = \frac{p + p_k}{p - p_k} \quad (3.62)$$

“All-pass” filtr má opět jednotkové zesílení pro všechny frekvence a lze ukázat, že tento člen **zavádí pro $w \in [0, \infty)$ dodatečné fázové zpoždění $(-180^\circ, 0^\circ)$ k fázovému zpoždění přenosové funkce $F_{mf}(p)$, přičemž $\arg(p_k) = -90^\circ$. [Matlab: fáze v intervalu $(-180^\circ, 0^\circ)$... zde je shoda]**

Příklad 3.6.:

Uvažujme přenos neminimálně-fázového systému $F(p) = \frac{10}{(p-1)(p+10)}$

a přenos minimálně-fázového systému $F_1(p) = \frac{10}{(p+1)(p+10)}$

Přenosovou funkci neminimálně-fázového systému přepíšeme do faktorizovaného tvaru

$$F(p) = F_{nmf}(p)F_{mf}(p) = \frac{p+1}{p-1} \frac{10}{(p+1)(p+10)},$$

ze kterého je opět zřejmé, že systém s nestabilním pólem bude vykazovat větší fázové zpoždění, než systém se stejným stabilním pólem.

3. Systémy s dopravním zpožděním

Větší fázové zpoždění u těchto systémů přímo vyplývá z frekvenční charakteristiky členu s dopravním zpožděním.

Přechodové charakteristiky asymptoticky stabilních neminimálně-fázových systémů

Přechodová charakteristika $h(t)$ asymptoticky stabilního neminimálně-fázového systému (obsahuje jednu nebo více nestabilních nul) může vykazovat *počáteční nebo vícenásobné podregulování*, které souvisí s rozmístěním nestabilních nul.

Uvažujme pro jednoduchost striktně ryzí přenosovou funkci (3.57) pouze s reálnými póly a nulami (vyloučíme tak kmitavý charakter odezvy způsobený komplexně sdruženými póly).

Definice: (Vícenásobné podregulování)

Přechodová funkce $h(t)$ vykazuje *vícenásobné podregulování* pro $t > 0$, jestliže existuje k různých hodnot $t_i, i = 1, \dots, k, 0 < t_1 < \dots < t_k < +\infty$ takových, že

$$\begin{aligned} 1/ & \quad K_s h(t_i) < 0, \quad i = 1, \dots, k \\ 2/ & \quad \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k \\ 3/ & \quad K_s \left. \frac{d^2h(t)}{dt^2} \right|_{t=t_i} > 0, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{3.63}$$

Definice: (Počáteční podregulování)

Přechodová funkce $h(t)$ vykazuje *počáteční podregulování*, jestliže $h(t)|_{t=0^+}$ nabíhá v opačném směru, než je její ustálená hodnota:

$$K_s h(t) < 0, \quad \forall t, \quad 0 < t < t_1 \tag{3.64}$$

Analýzujeme vznik počátečního podregulování.

Označme n_r relativní řád striktně ryzí přenosové funkce (3.57), $n_r = n - m$.

Pro určení “směru náběhu” přechodové charakteristiky v čase $t = 0^+$ použijeme větu o počáteční hodnotě přechodové funkce $h(t)$ a určíme její první nenulovou derivaci:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow \infty} K \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = 0$$

N

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h^{(n_r)}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^{n_r+1} F(p) \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow \infty} K \frac{p^{n_r} \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = K \quad (3.65)$$

První nenulová derivace přechodové funkce v počátku je tedy rovna parametru K , který lze vyjádřit pomocí statického zesílení K_s vztahem (3.58):

$$K = K_s \frac{\prod_{i=1}^n (-p_i)}{\prod_{j=1}^m (-z_j)}$$

Z definice počátečního podregulování a z (3.64) je zřejmé, že podregulování nastane při různosti znamének parametrů K a K_s .

Z (3.58) potom vyplývá:

U stabilních, neminimálně-fázových systémů (všechny reálné póly p_i jsou záporné) dochází k počátečnímu podregulování pouze při lichém počtu nestabilních nul.

V praxi tento charakter odezvy můžeme pozorovat např. na dynamické odezvě tlaku páry v parogenerátoru při skokové změně dodávaného množství páry do turbíny, při řízení stoupání letadla pomocí nastavení polohy klapek, při vícesmyčkovém řízení MIMO systémů, při řízení vozidel natáčením zadních kol, a j.

Poznámka:

Analýza vzniku vícenásobného podregulování a souvislosti počtu podregulování či extrémů na přechodové charakteristice s rozložením nul a pólů je obtížnější a přesahuje rámec vykládané látky.

4. REGULAČNÍ OBVOD A STABILITA REGULAČNÍCH OBVODŮ

4.1. Struktura regulačního obvodu, přímovazební a zpětnovazební řízení

Primární funkcí každého regulátoru či řídicího systému je regulovat chování jedné nebo více proměnných na řízeném systému (procesu) prostřednictvím jeho vstupů. Obvykle požadujeme, aby se **regulovaná veličina** udržovala na zadané konstantní hodnotě nebo aby sledovala zadanou trajektorii. V obou případech je toto požadované chování zadáváno v podobě **referenčního vstupního signálu**, který má regulovaná veličina sledovat.

Je-li referenční signál přímo zpracováván regulátorem, který generuje řízení přiváděné na vstup řízeného systému, hovoříme o regulačním obvodu s **přímovazebním (programovým) řízením**. Takové řízení může být efektivní pouze v ryze deterministické situaci nebo když možné změny parametrů systému a vliv poruch nezpůsobí významnější odchylky regulované veličiny od hodnot zadávaných referenčním signálem. Programové řízení lze tedy použít např. při řízení obráběcího stroje či řízení polohy ramena robotického manipulátoru, ale nebude použitelné při stabilizaci polohy inverzního kyvadla na pohyblivém vozíku či pro stabilizaci hlavně tanku při jízdě terénem.

Charakteristickým rysem regulačních obvodů je naopak využívání **zpětné vazby** od regulované veličiny k referenčnímu signálu. Zavedení zpětné vazby samozřejmě implikuje nutnost měření regulované veličiny nějakým senzorem. Bez **záporné zpětné vazby** by nebylo možné průběžné porovnávání skutečného průběhu regulované veličiny s požadovaným průběhem a jeho využití pro korekci průběhu regulované veličiny. Dáváme tedy přednost regulačním obvodům se **zpětnovazebním řízením**, které automaticky potlačuje vliv změn parametrů systému a působících poruch na chování regulované veličiny.

Regulační obvody s přímovazebním a zpětnovazebním řízením jsou na následujících schématech (regulovanou veličinou je zde výstup řízeného systému):

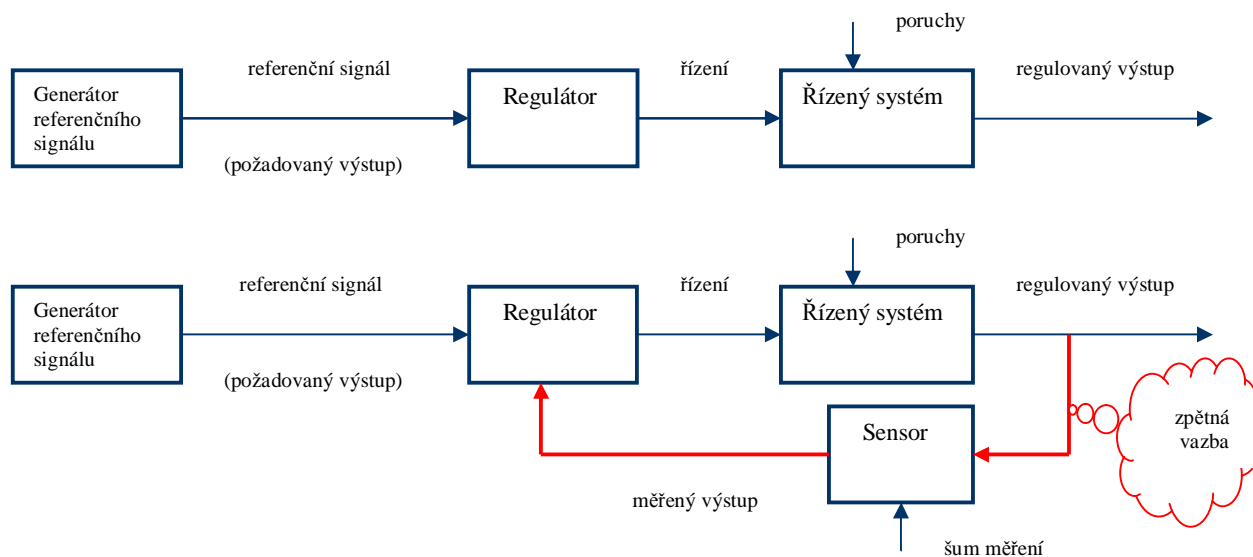
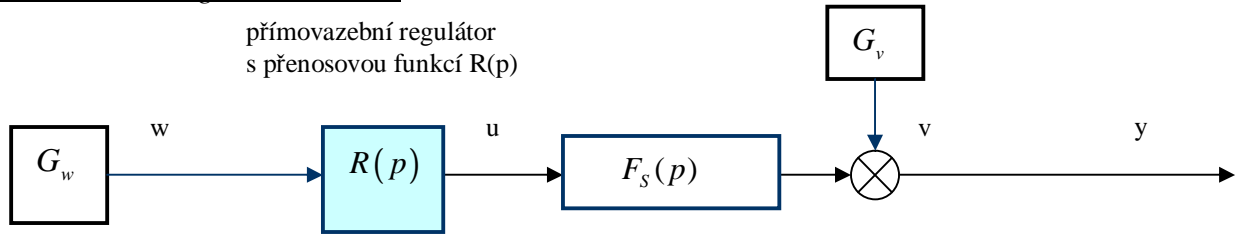


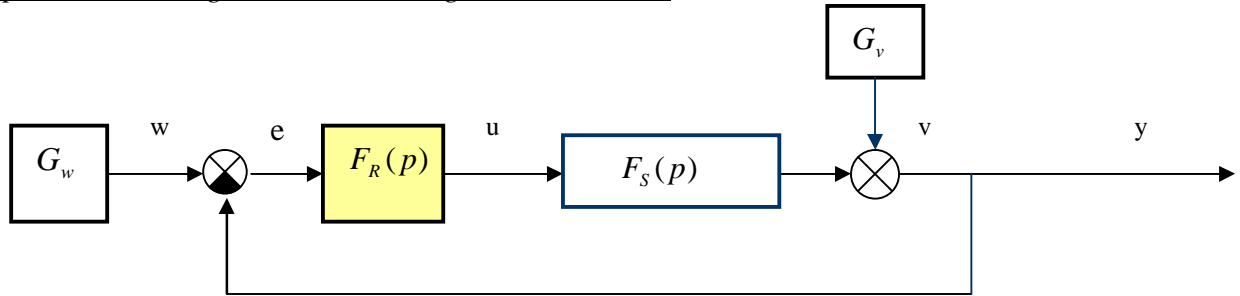
Schéma zpětnovazebního regulačního obvodu pouze naznačuje, že regulátor nějakým způsobem zpracovává referenční signál a měřený výstup. V této souvislosti je však důležité uvést, že způsob zpracování těchto signálů definuje principiálně odlišné regulátory (*regulátory s jedním a dvěma stupni volnosti* - viz dále). Za předpokladu, že dynamiku senzoru lze zanedbat, je měřený výstup přes nějakou převodní konstantu měření úměrný regulovanému výstupu a je možné akceptovat zjednodušené schéma zpětnovazebního regulačního obvodu s jednotkovou zpětnou vazbou. Poruchy působící na řízený systém respektujeme aditivní poruchou a přepočítáváme ji obvykle na výstup řízeného systému.

Vezmeme-li v úvahu tato zjednodušení, můžeme zakreslit schéma přímovazebního regulačního obvodu a zpětnovazebního regulačního obvodu s regulátorem 1DoF (s jedním stupněm volnosti – **1 Degree of Freedom**). Vstupem regulátoru 1DoF je **regulační odchylka**, definovaná rozdílem referenčního signálu a měřeného výstupu.

Přímovazební regulační obvod :



Zpětnovazební regulační obvod s regulátorem 1DoF:



$F_S(p)$... přenosová funkce řízeného systému, $F_R(p)$... přenosová funkce regulátoru
 G_w generátor referenčního signálu $w(t)$, G_v generátor výstupní poruchy $v(t)$
 $e(t) = w(t) - y(t)$... regulační odchylka, $u(t)$... řízení, $y(t)$... měřený (regulovaný) výstup

Z uvedených schémat je zřejmé, že pokud bude výstupní porucha nulová, lze navrhnout k danému řízenému systému přímovazební regulátor $R(p)$ i zpětnovazební regulátor $F_R(p)$ tak, že regulované výstupy budou na referenční signál reagovat shodným způsobem. Začne-li však působit nenulová porucha, přímovazební regulátor na ni nereaguje a porucha se plně projeví na regulovaném výstupu. Zpětnovazební regulátor prostřednictvím zpětné vazby reaguje na změnu regulovaného výstupu a vlivem záporné zpětné vazby dochází k potlačení jejího vlivu.

Příklad 4.1.:

Pro řízený stabilní systém s přenosem $F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{20p + 1}$ navrhnete přímovazební a zpětnovazební regulátor tak, aby bylo docíleno požadovaného tvaru přenosu mezi referenčním signálem a regulovaným výstupem

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{1}{p^2 + 1.4p + 1}$$

Pro oba případy zjistěte, jaká bude ustálená hodnota regulovaného výstupu při odezvě na referenční signál $w(t) = 1[t]$, bude-li na výstupu současně působit konstantní porucha $v(t) = 0.5[t]$

Řešení:

1/ V přímovazebním regulačním obvodu platí $F_{y,w}(p) = F_S(p)R(p)$ a odtud vyplývá

$$\text{přenos přímovazebního regulátoru: } R(p) = \frac{U(p)}{W(p)} = \frac{20p + 1}{p^2 + 1.4p + 1}$$

2/ Ve zpětnovazebním regulačním obvodu platí $F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)}$.

Porovnáním $F_{y,w}(p)$ u obou způsobů řízení určíme přenos zpětnovazebního regulátoru $F_R(p)$:

$$F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = F_S(p)R(p) \Rightarrow F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - R(p)F_S(p)} = \frac{20p + 1}{p(p + 1.4)}$$

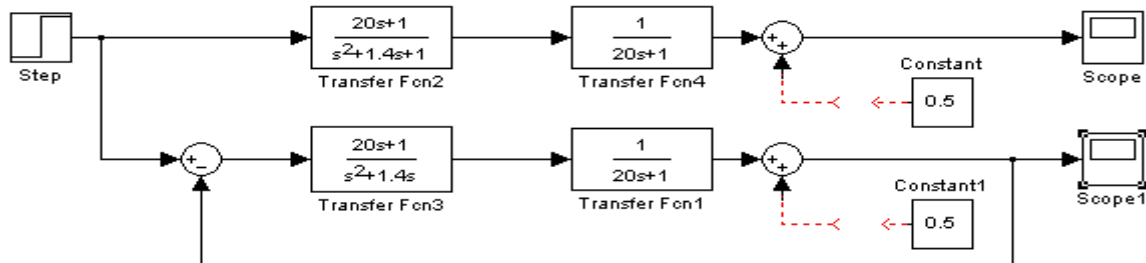
3/ Ustálená hodnota regulovaného výstupu při skokové odezvě a působící konstantní poruše:

Přímovazební regulační obvod: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF_{y,w}(p)W(p) + 0.5 = 1.5$

Zpětnovazební regulační obvod:

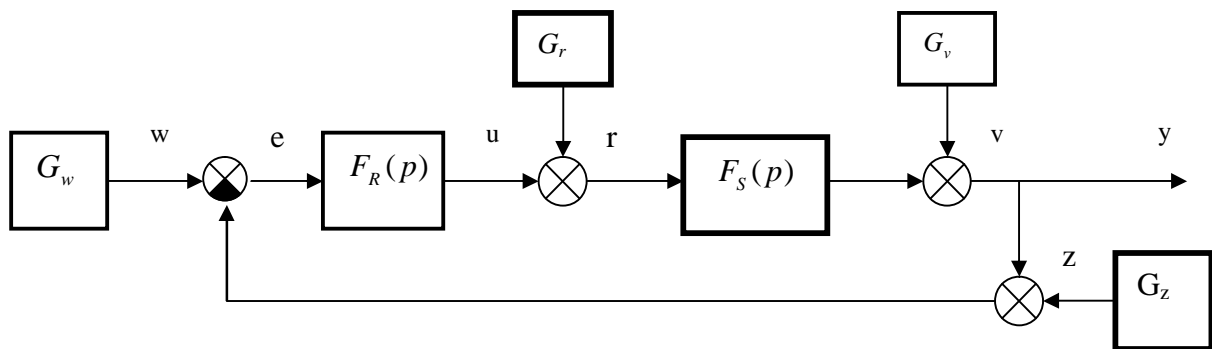
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF_{y,w}(p)W(p) + \lim_{p \rightarrow 0} pF_{y,v}(p)V(p) = 1 + \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + F_S(p)F_R(p)} \frac{0.5}{p} = 1$$

(v daném případě bude porucha plně kompenzována).



4.2. Přenosy v regulačním obvodu. Regulátory s jedním a dvěma stupni volnosti

Uvažujme regulační obvod s regulátorem 1DoF a uvažujme ještě aditivní poruchu $r(t)$ na vstupu řízeného systému, poruchu $v(t)$ na výstupu systému a poruchu $z(t)$ ve zpětné vazbě, která zastupuje „šum“ měření a působí obvykle v pásmu vyšších frekvencí:



Předpokládejme, že řízený systém je popsán striktně ryzí přenosovou funkcí

$$F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b(p)}{a(p)}; \quad a(p), b(p) \text{ jsou nesoudělné polynomy, st } a(p) = n, \text{ st } b(p) \leq n-1$$

a 1 DoF regulátor ryzí přenosovou funkcí

$$F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{d(p)}{c(p)}; \quad c(p), d(p) \text{ jsou nesoudělné polynomy, st } c(p) = \text{st } d(p) = m$$

Polynomy $a(p), c(p)$ jsou obvykle monické polynomy (koeficient u nejvyšší mocniny je 1).

Generátory externích signálů G_w, G_r, G_v a G_z lze popsat polynomiálními zlomky:

$$W(p) = \frac{b_w(p)}{a_w(p)}, \quad R(p) = \frac{b_r(p)}{a_r(p)}, \quad V(p) = \frac{b_v(p)}{a_v(p)}, \quad Z(p) = \frac{b_z(p)}{a_z(p)} \quad (4.1)$$

Uveďme nejprve dva základní typy přenosů bez uvažování poruch.

Přenos otevřeného regulačního obvodu:

$$F_o(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = F_S(p)F_R(p) = \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)} \quad (4.2)$$

Přenos uzavřeného regulačního obvodu(s 1DoF regulátorem):

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} \quad (4.3)$$

Důležitou roli mají čtyři základní přenosy (viz dále „*vnitřní stabilita regulačního obvodu*“):

$$\begin{aligned}
 1/ \quad F_{y,w}(p) &= \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1+F_S(p)F_R(p)} = \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)} \\
 2/ \quad F_{y,v}(p) &= \frac{Y(p)}{V(p)} = \frac{1}{1+F_S(p)F_R(p)} = \frac{a(p)c(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)} \\
 3/ \quad F_{y,r}(p) &= \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{F_S(p)}{1+F_S(p)F_R(p)} = \frac{b(p)c(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)} \\
 4/ \quad F_{u,w}(p) &= \frac{U(p)}{W(p)} = \frac{F_R(p)}{1+F_S(p)F_R(p)} = \frac{a(p)d(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Při současném působení všech externích signálů (poruch) v uzavřeném regulačním obvodu je Laplaceův obraz regulovaného výstupu $Y(p)$ dán superpozicí obrazů odezev externích signálů přes příslušné přenosy v regulačním obvodu:

$$Y(p) = F_{y,w}(p)W(p) + F_{y,r}(p)R(p) + F_{y,v}(p)V(p) - F_{y,z}(p)Z(p) \quad (4.5)$$

Zaměříme nyní pozornost na **regulátor s jedním a dvěma stupni volnosti (1DoF) a (2DoF)**.

Všimněme si, že *charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu* $a_z(p)$

$$a_z(p) = a(p)c(p) + b(p)d(p) \quad (4.6)$$

je shodný u všech přenosů. V čitateli všech přenosových funkcí se vždy vyskytuje jeden z polynomů regulátoru $d(p)$ nebo $c(p)$. Tato skutečnost je pro 1DoF regulátor limitujícím faktorem pro dosažení požadovaného tvaru přenosové funkce uzavřeného regulačního obvodu tj. pro možnost nezávislého umístění nul a pólů zpětnovazebním regulátorem 1DoF.

Rovnice regulátoru 1DoF:

$$U(p) = \frac{d(p)}{c(p)} E(p) = \frac{1}{c(p)} [d(p)W(p) - d(p)Y(p)] \quad (4.7)$$

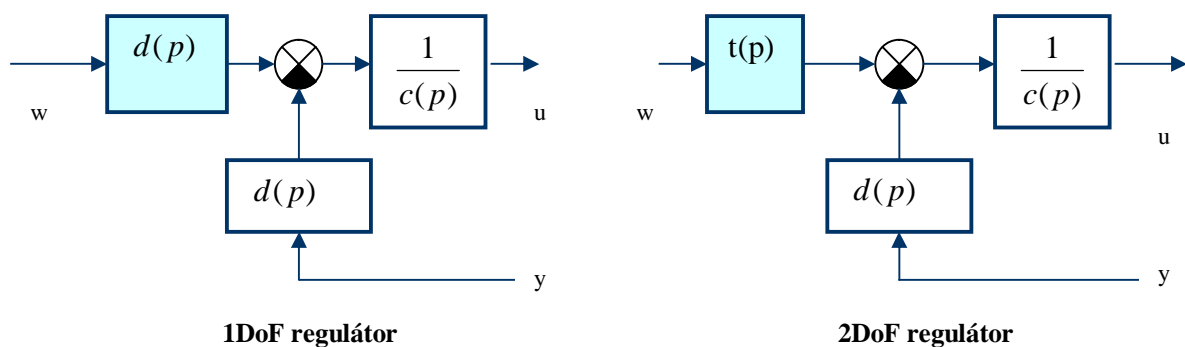
Regulátor 1DoF je regulátor s jedním vstupem (regulační odchylka) a jedním výstupem (řízení), který stejným způsobem „zpracovává“ referenční signál $w(t)$ i měřený výstup $y(t)$.

Z předchozího vztahu je zřejmá možnost zobecnění regulátoru 1DoF v tom smyslu, že referenční signál a měřený výstup budou zpracovávány odlišným způsobem, což vyjádříme zavedením nějakého polynomu $t(p)$, st $t(p) \leq$ st $c(p)$ do rovnice (4.7).

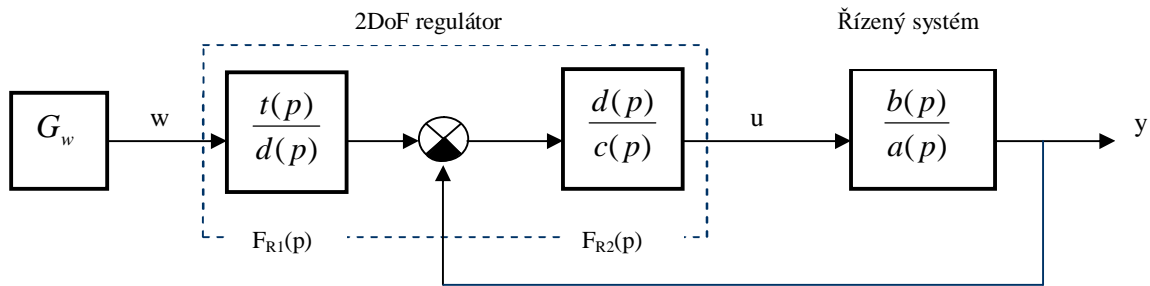
Rovnice regulátoru 2DoF:

$$U(p) = \frac{1}{c(p)} [t(p)W(p) - d(p)Y(p)] \quad (4.8)$$

Blokové schéma obou regulátorů je na následujících obrázcích:



Přesuneme u 2DoF regulátoru blok s polynomem $d(p)$ před a za součtový člen a zakreslíme blokové schéma regulačního obvodu s 2DoF regulátorem



Regulátor 2DoF je regulátor s dvěma vstupy (referenční signál, měřený výstup) a jedním výstupem (řízení), který „zpracovává“ referenční signál $w(t)$ a měřený výstup $y(t)$ nezávisle.

Přímovazební část regulátoru s přenosem $F_{R1}(p)$ působí nezávisle na uzavřené regulační smyčce a představuje tedy druhý stupeň volnosti při návrhu regulátoru. Tato část generuje přímovazební („kompenzační“) řízení, které může být využito např. pro kompenzaci nežádoucích nul (vykrácení stabilních nul), což vyplývá z tvaru přenosu uzavřeného regulačního obvodu.

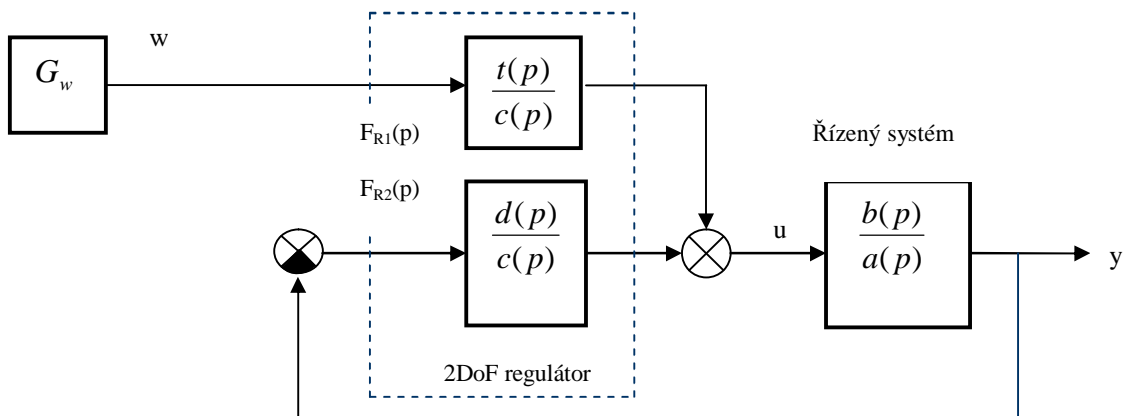
Přenos uzavřeného regulačního obvodu (s 2DoF regulátorem):

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = F_{R1}(p) \frac{F_S(p)F_{R2}(p)}{1 + F_S(p)F_{R2}(p)} = \frac{b(p)t(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} \quad (4.9)$$

Uvažujme nyní situaci, kdy uzavřený regulační obvod s 2DoF regulátorem je stabilní, ale navržený regulátor má polynom $d(p)$ s nestabilními nulami (neminimálně-fázový systém). V takovém případě bychom pro simulaci nemohli výše uvedené schéma použít, neboť nestabilní nuly regulátoru se stávají v přímovazební části nestabilními póly a simulace by paradoxně vedla k nestabilnímu chování stabilního systému.

Použijeme proto alternativní modelové schéma, která přímo vyplývá z rovnice (4.8)

$$U(p) = \frac{1}{c(p)} [t(p)W(p) - d(p)Y(p)] = \frac{t(p)}{c(p)}W(p) - \frac{d(p)}{c(p)}Y(p) \quad (4.10)$$



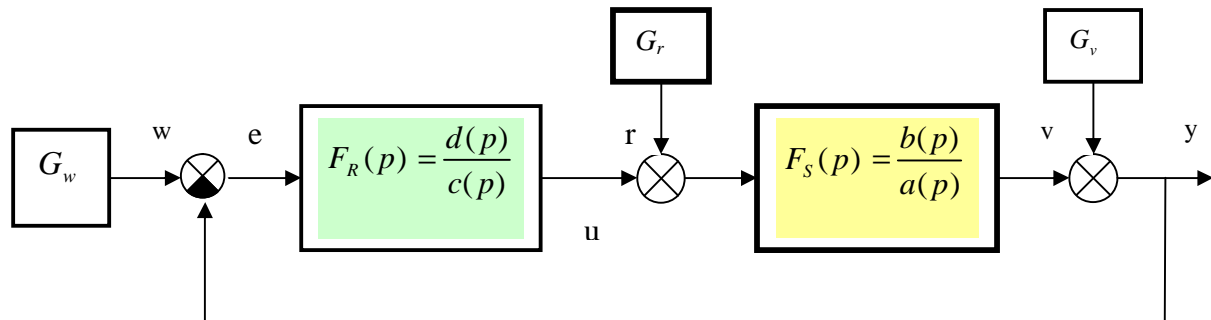
Přenos uzavřeného regulačního obvodu zůstává nezměněn

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_S(p)F_{R1}(p)}{1 + F_S(p)F_{R2}(p)} = \frac{\frac{b(p)t(p)}{a(p)c(p)}}{1 + \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)}} = \frac{b(p)t(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} \quad (4.11)$$

a nezměněn zůstává i charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu (4.6).

Předpokládejme, že řízený systém může mít nestabilní póly a/nebo nuly, avšak regulátor má být přirozeně navržen tak, aby uzavřený regulační obvod byl stabilní, t.zn. charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu $a_z(p) = a(p)c(p) + b(p)d(p)$ musí být stabilním polynomem. Pojem „*vnitřní stabilita uzavřeného regulačního obvodu*“ souvisí s hypotetickou možností návrhu regulátoru tak, že nestabilní póly systému budou vykráceny nestabilními nulami regulátoru resp. nestabilní nuly systému budou vykráceny nestabilními póly regulátoru.

Uvažujme schéma regulačního obvodu s 1DoF regulátorem



a analyzujeme důsledky takového krácení (při krácení budeme pro jednoduchost předpokládat stejné stupně polynomů a nestabilitu všech jejich kořenů):

1/ *Nestabilní póly systému budou vykráceny nestabilními nulami regulátoru.*

Pro nestabilní polynomy platí $d(p) = a(p)$.

Respektujeme-li tuto rovnost ve čtyřech základních přenosech (4.5) zjistíme, že v přenosech 1/, 2/ a 4/ lze nestabilní polynom ve jmenovateli formálně zkrátit se shodným nestabilním polynomem v čitateli, ale nelze jej vykrátit v přenosu poruchy na vstupu systému na výstup. Nestabilní polynom $d(p) = a(p)$ faktorizuje charakteristický polynom $a_z(p)$ a důsledkem je neomezený výstup uzavřeného regulačního obvodu při působení nenulové poruchy $r(t)$ na vstupu systému.

2/ *Nestabilní nuly systému budou vykráceny nestabilními póly regulátoru.*

Pro nestabilní polynomy platí $c(p) = b(p)$.

Respektujeme-li tuto rovnost ve čtyřech základních přenosech (4.5) zjistíme, že v přenosech 1/, 2/ a 3/ lze nestabilní polynom ve jmenovateli formálně zkrátit se shodným nestabilním polynomem v čitateli, ale nelze jej vykrátit v přenosu referenčního signálu na řízení. Nestabilní polynom $c(p) = b(p)$ faktorizuje charakteristický polynom $a_z(p)$ a důsledkem je neomezené řízení, a tedy i výstup uzavřeného regulačního obvodu, při působení nenulového referenčního signálu $w(t)$.

Z uvedeného vyplývá důležitý poznatek který musíme respektovat při návrhu regulátorů: nekrátit nestabilní nuly resp. póly regulátoru s nestabilními nulami resp. póly systému. Pokud nedojde k tomuto krácení, o stabilitě všech přenosů v uzavřeném regulačním obvodu rozhoduje pouze stabilita charakteristického polynomu $a_z(p) = a(p)c(p) + b(p)d(p)$.

4.3. Stabilita a kriteria stability regulačních obvodů

Stabilitu uzavřeného regulačního obvodu považujeme za základní požadavek při návrhu regulátorů (1DoF nebo 2DoF), protože naší snahou by vždy mělo být určit nejprve úplnou množinu stabilizujících regulátorů a teprve na této množině vybírat v nějakém smyslu optimální regulátor, který zaručí formulované požadavky na kvalitu regulace.

O stabilitě uzavřeného regulačního obvodu rozhodují jeho póly, které lze určit řešením charakteristické rovnice

$$a_z(p) = a(p)c(p) + b(p)d(p) = 0 \quad (4.12)$$

Z analýzy stability LDS víme, že spojitý lineární t-invariantní dynamický systém je asymptoticky stabilní tehdy a jen tehdy, když reálné části všech pólů přenosové funkce (reálné části vlastních čísel matice dynamiky při vnitřním popisu) jsou záporné \rightarrow póly leží v levé komplexní polorovině.

Charakteristická rovnice (4.12) je algebraickou rovnicí a u složitějších obvodů je pro určení pólů nutné použít numerické řešení. Pro určení stability však není nutná znalost konkrétních hodnot pólů, ale pouze odpověď na otázku, zda reálné části pólů leží v levé komplexní polorovině či ne. Pro tento účel byla vypracována **algebraická kriteria stability**, která o stabilitě uzavřeného regulačního obvodu rozhodnou pouze na základě znalosti koeficientů charakteristické rovnice.

Hurwitzovo algebraické kritérium stability

Vychází z charakteristické rovnice (4.12) s určenými koeficienty

$$a_z(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (4.13)$$

a ze Stodolovy nutné podmínky stability:

„Všechny koeficienty a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, jsou nenulové a mají stejná znaménka“.

Pokud je charakteristický polynom $a_z(p)$ nejvýše druhého stupně, st $a_z(p) \leq 2$, je nutná podmínka i postačující podmínkou asymptotické stability.

V obecném případě postupujeme následovně:

1/ Z koeficientů charakteristické rovnice sestojíme Hurwitzovu matici H (bez újmy na obecnosti předpokládáme kladná znaménka koeficientů):

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \mathbf{L} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

2/ Vypočteme t.zv. Hurwitzovy determinanty (hlavní diagonální minory) H_i , $i = 1, \dots, n$

$$H_1 = a_{n-1}; H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \dots; H_n = a_0 H_{n-1} \quad (4.15)$$

Hurwitzovo kritérium stability: LDS je asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow H_i > 0, \forall i, i = 1, \dots, n$

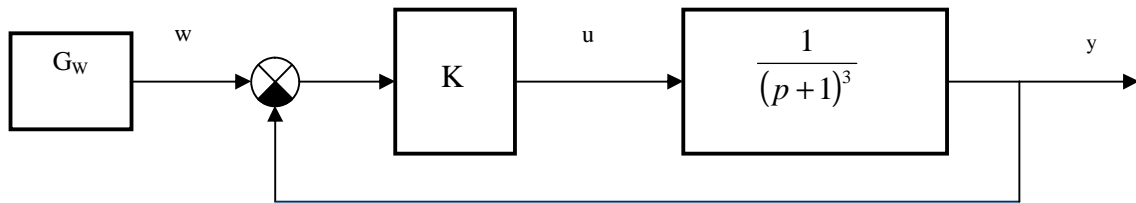
Z determinantu Hurwitzovy matice $H_n = a_0 H_{n-1}$ lze určit **mez aperiodické (nekmitavé) stability a mez kmitavé stability:**

Je-li $a_0 = 0$ a všechny diagonální minory jsou kladné, charakteristická rovnice má nulový pól a regulační obvod je **na mezi aperiodické stability.**

Je-li $H_{n-1} = 0$, charakteristická rovnice má dvojici ryze imaginárních pólů a regulační obvod je **na mezi kmitavé stability.**

Příklad 4.2.:

Analýzujte stabilitu uzavřeného regulačního obvodu vzhledem k zesílení $K > 0$ s použitím Hurwitzova kritéria



Otevřená regulační smyčka je stabilní $\forall K, K > 0$.

Určíme přenos uzavřeného regulačního obvodu a charakteristickou rovnicí:

$$F_{y,w}(p) = \frac{K}{1 + \frac{K}{(p+1)^3}} = \frac{K}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K}; \quad a_z(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K = 0$$

Určíme Hurwitzovu matici a Hurwitzovy determinanty:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1+K & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1+K \end{bmatrix}; \quad H_1 = 3, \quad H_2 = 8 - K, \quad H_3 = (1+K)H_2$$

Mez kmitavé stability při $K = 8 \dots$ „kritické zesílení“ – viz bezpečnost v zesílení a ve fázi, odst. 4.4).

Routh-Hurwitzovo algebraické kritérium stability

Vychází opět ze znalosti koeficientů charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu

$$a_z(p) = \underline{a}_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \underline{a}_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_2(p) + a_1(p) + a_0 = 0 \quad (4.16)$$

a ze Stodolovy nutné podmínky stability.

Kritérium je založeno na konstrukci *Routh-Hurwitzova pole*, které je trojúhelníkového tvaru a je vytvářeno z koeficientů polynomů, které vzniknou postupnou redukcí charakteristického polynomu $a_z(p)$. O stabilitě rozhodují změny znamének koeficientů redukovaných polynomů v prvním sloupci *Routh-Hurwitzova pole*.

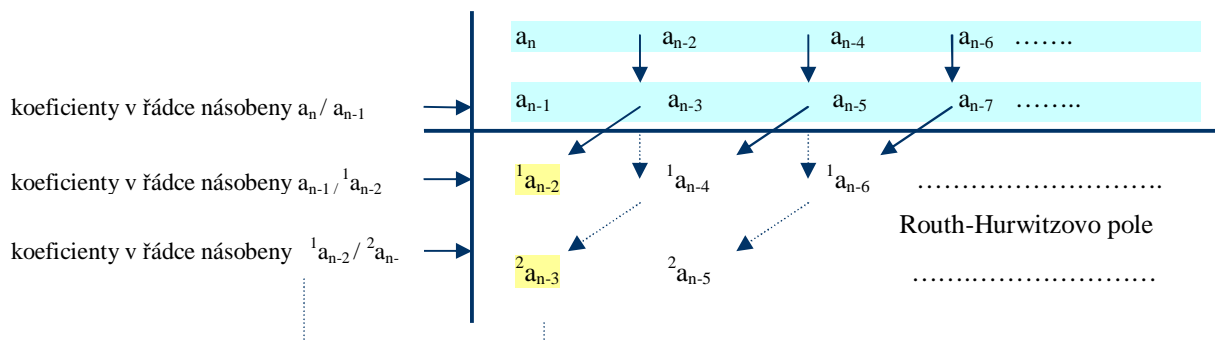
Routh-Hurwitzovo kritérium stability:

Počet kořenů (pólů) charakteristického polynomu $a_z(p)$ s kladnou reálnou částí je roven počtu změn znamének koeficientů v prvním sloupci *Routh-Hurwitzova pole*.

Odtud vyplývá, že uzavřený regulační obvod je stabilní \Leftrightarrow když všechny koeficienty v prvním sloupci *Routh-Hurwitzova pole* jsou nenulové a mají stejné (kladné) znaménko.

Konstrukce Routh-Hurwitzova pole:

Počínaje koeficientem a_n rozdělíme koeficienty polynomu $a_z(p)$ na liché (podtržené) a sudé, sepíšeme je do řádek pod sebou a provádíme redukcí polynomů dle následujícího schéma:



Koeficienty redukovaného polynomu ve třetí řádce (první řádka Routh-Hurwitzova pole) dostaneme přenásobením druhé řádky poměrem koeficientů umístěných v prvních dvou řádkách v prvním sloupci, odečtením této řádky od první a sepsáním výsledku s posunem o jedno místo vlevo (koeficient a_n u nejvyšší mocniny byl anulován). Analogickým způsobem počítáme koeficienty redukovaných polynomů i v dalších řádkách:

$$1.\text{řádka R.-H. pole: } a_n - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-1} = 0, \quad {}^1 a_{n-2} = a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3}, \quad {}^1 a_{n-4} = a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5}, \dots$$

$$2.\text{řádka R.-H. pole: } a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} a_{n-2} = 0, \quad {}^2 a_{n-3} = a_{n-3} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} a_{n-4}, \dots$$

Příklad 4.3.:

Analyzujte stabilitu regulačního obvodu, má-li jeho charakteristický polynom tvar

$$a_z(p) = 1p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p + 5$$

Řešení:

	1	3	5
koeficienty v řádce násobeny 1/2	2	4	0
koeficienty v řádce násobeny 2	1	5	0
koeficienty v řádce násobeny -1/6	-6	0	0
	5		

Routh-Hurwitzovo pole

V prvním sloupci Routh-Hurwitzova pole jsou koeficienty 1, -6, 5 a dochází tedy ke dvěma změnám znamének koeficientů. Regulační obvod bude nestabilní, s dvěma nestabilními póly.

(Matlab: $p_{1,2} = 0.28 \pm j1.41$, $p_{3,4} = -1.28 \pm j0.85$)

Michajlovovo frekvenční kritérium stability:

I toto kritérium vychází ze znalosti charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu (4.13). Charakteristický polynom $a_z(p)$ upravíme na součin kořenových činitelů

$$a_z(p) = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) \tag{4.17}$$

Po dosazení $p = jw$ dostáváme Michajlovovu funkci $a_z(jw)$

$$a_z(jw) = a_n (jw - p_1)(jw - p_2) \dots (jw - p_n) \tag{4.18}$$

pro jejíž modul a argument platí

$$|a_z(jw)| = a_n |jw - p_1| |jw - p_2| \dots |jw - p_n|$$

$$\arg a_z(jw) = \arg(jw - p_1) + \arg(jw - p_2) + \dots + \arg(jw - p_n) \tag{4.19}$$

a můžeme ji vykreslit v komplexní rovině jako t.zv. **Michajlovův hodograf**.

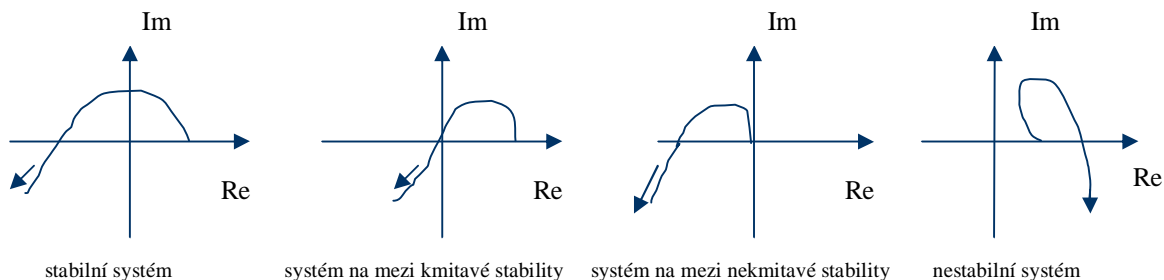
Budou-li všechny kořeny p_1, p_2, \dots, p_n charakteristického polynomu ležet v levé komplexní polovině, bude při $w \in \langle 0, \infty \rangle$ pro přírůstek argumentu Michajlovovy funkce platit

$$\Delta_{0 \leq w \leq \infty} \arg a_z(jw) = n \frac{P}{2} \tag{4.20}$$

Na základě tohoto vztahu lze formulovat **Michajlovovo kritérium stability**:

Uzavřený regulační obvod bude stabilní právě tehdy, když Michajlovův hodograf bude začínat na kladné reálné poloose komplexní roviny a proti směru hodinových ručiček projde postupně tolika kvadranty, kolikátého stupně je charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu. Jestliže průběh hodografu vychází z počátku je systém na mezi nekmitavé stability, jestliže projde počátkem pro nějakou nenulovou frekvenci, je systém na mezi kmitavé stability.

Ilustrace možných průběhů Michajlova hodografu pro charakteristický polynom 3. stupně:



Charitonovův teorém

Rozhoduje o stabilitě v případě, že koeficienty a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ charakteristického polynomu

$$a_z(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n \quad (4.21)$$

mohou nabývat hodnot z intervalu $a_i^{\min} \leq a_i \leq a_i^{\max} \rightarrow a_z(p, a_i)$ je tzv. „**intervalový polynom**“.

Charitonovův teorém:

Nechť pro intervalový polynom $a_z(p, a_i)$ jsou určeny 4 polynomy:

$$\begin{aligned} Q_1(p) &= a_0^{\min} + a_1^{\min} p + a_2^{\max} p^2 + a_3^{\max} p^3 + \dots \\ Q_2(p) &= a_0^{\min} + a_1^{\max} p + a_2^{\max} p^2 + a_3^{\min} p^3 + \dots \\ Q_3(p) &= a_0^{\max} + a_1^{\max} p + a_2^{\min} p^2 + a_3^{\min} p^3 + \dots \\ Q_4(p) &= a_0^{\max} + a_1^{\min} p + a_2^{\min} p^2 + a_3^{\max} p^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.22)$$

Potom charakteristický polynom $a_z(p, a_i)$ má stabilní kořeny (póly) pro libovolné hodnoty parametrů (vyhovujících hraničním omezením) tehdy a jen tehdy, když všechny čtyři polynomy $Q_1(p), Q_2(p), Q_3(p), Q_4(p)$ splňují Hurwitzovo kritérium stability.

Nástin důkazu: Pro $p = j\omega$ s daným $\omega = \omega_0$ a při $a_i^{\min} \leq a_i \leq a_i^{\max}$ je množina hodnot intervalového polynomu $a_z(j\omega_0, a_i)$ dvourozměrná množina všech komplexních hodnot, vymezená obdélníkem, jehož vrcholy $(\operatorname{Re}^{\min} \{a_z\}, \operatorname{Im}^{\min} \{a_z\}), (\operatorname{Re}^{\min} \{a_z\}, \operatorname{Im}^{\max} \{a_z\}), (\operatorname{Re}^{\max} \{a_z\}, \operatorname{Im}^{\max} \{a_z\}), (\operatorname{Re}^{\max} \{a_z\}, \operatorname{Im}^{\min} \{a_z\})$ po řadě odpovídají polynomům Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 . Při $\omega \in [0, \infty)$ obdélníky sledují Michajlovův hodograf.

Nyquistovo frekvenční kritérium stability

- Vychází z teorie komplexní proměnné (Cauchyho princip argumentu, konformní zobrazení).
- Umožňuje analyzovat stabilitu uzavřeného regulačního obvodu na základě znalosti průběhu frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $F_o(j\omega)$.
- Otevřený regulační obvod může být stabilní, nestabilní či na mezi asymptotické stability.

Předpoklady:

1. $F(p)$ je racionální funkce komplexní proměnné p , $p = s + j\omega$ s reálnými koeficienty, která je analytická (diferencovatelná) v celé komplexní rovině ($\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p$) s výjimkou svých pólů.
2. V komplexní rovině p existuje jednoduchá, spojitá, uzavřená, kladně orientovaná (po směru hodinových ručiček) křivka Γ_p , která obklopuje všechny póly a nuly $F(p)$.

3. Z konformního zobrazení vyplývá, že dosazením hodnot komplexní proměnné p , které leží na křivce Γ_p do $F(p)$, dostaneme v komplexní rovině $(\text{Re } F(p), j\text{Im } F(p))$ jinou spojitou, uzavřenou křivku Γ_F , kterou považujeme za zobrazení $F : \Gamma_p \rightarrow \Gamma_F$, resp. $\Gamma_F = F(\Gamma_p)$.

Cauchyho princip argumentu:

Jestliže funkce $F(p)$ má P pólů a Z nul obklíčených v rovině p spojitou, jednoduchou, uzavřenou, kladně orientovanou křivkou Γ_p , potom počet obklíčení N počátku roviny $(\text{Re } F(p), j\text{Im } F(p))$ křivkou Γ_F je roven

$$N = Z - P \tag{4.23}$$

přičemž kladný směr obklíčení (po směru hodinových ručiček) platí pro $N \geq 0$ a záporný (proti směru hodinových ručiček) platí pro $N < 0$.

Definice „obklíčení“: Uzavřená křivka Γ obklíčuje daný bod komplexní roviny N -krát, jestliže průvodič z daného bodu k bodu $p \in \Gamma$ se otočí o úhel $N \times 2\pi$ při průchodu bodu $p \in \Gamma$ celou uzavřenou křivkou.

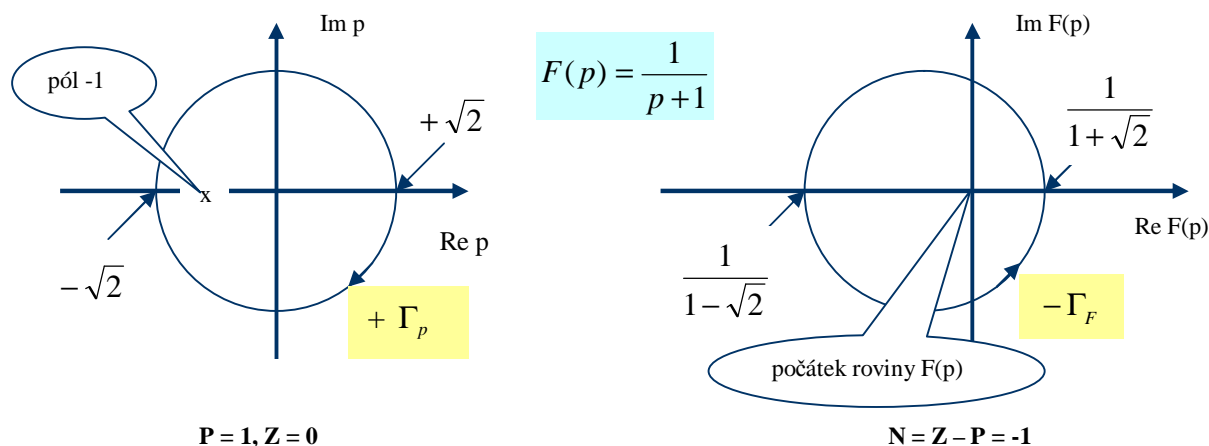
Ilustrace principu argumentu:

Uvažujme funkci $F(p) = 1/(p+1)$, která má jeden pól a žádnou nulu: $P = 1; Z = 0$.

Jako křivku Γ_p , která pól obklopuje, zvolme v komplexní rovině $(\text{Re } p, j\text{Im } p)$ např. kružnici se středem v počátku a s poloměrem $r = \sqrt{2}$.

Podle principu argumentu bude počátek roviny $(\text{Re } F(p), j\text{Im } F(p))$ obklíčen křivkou Γ_F N -krát, kde $N = Z - P = 0 - 1 = -1$ (tedy 1x proti směru hodinových ručiček).

Lze se o tom přesvědčit volbou několika bodů ležících na křivce Γ_p a jejich dosazením do $F(p)$:



Zvolíme-li křivku Γ_p tak, že nebude obklíčován žádný pól a žádnou nulou, nebude ani křivka Γ_F obklíčován počátek roviny $F(p)$: $N = Z - P = 0 - 0 = 0$.

Využití principu argumentu pro analýzu stability uzavřeného regulačního obvodu na základě znalosti frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $F_o(jw)$.

Přenos otevřené regulační smyčky zapíšeme s monickými polynomy $a_0(p), b_0(p)$ a zesílením K :

$$F_o(p) = F_s(p)F_R(p) = \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)} = K \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \tag{4.24}$$

Přenos uzavřené regulační smyčky :

$$F_{y,w}(p) = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)} = \frac{K \frac{b_o(p)}{a_o(p)}}{1 + K \frac{b_o(p)}{a_o(p)}} = \frac{Kb_o(p)}{a_o(p) + Kb_o(p)} \quad (4.25)$$

Protože o stabilitě uzavřeného regulačního obvodu rozhoduje funkce $1 + F_o(p)$ ve jmenovateli přenosu (4.25), budeme aplikovat princip argumentu na funkci

$$F(p) = 1 + F_o(p) = 1 + K \frac{b_o(p)}{a_o(p)} = \frac{a_o(p) + Kb_o(p)}{a_o(p)} \quad \left(\frac{Z}{P} \right) \quad (4.26)$$

Nuly této funkce jsou póly přenosu uzavřeného regulačního obvodu (4.25) a jejich počet označíme Z !

Póly této funkce jsou totožné s póly přenosu otevřeného regulačního obvodu (4.24) a jejich počet označíme P !

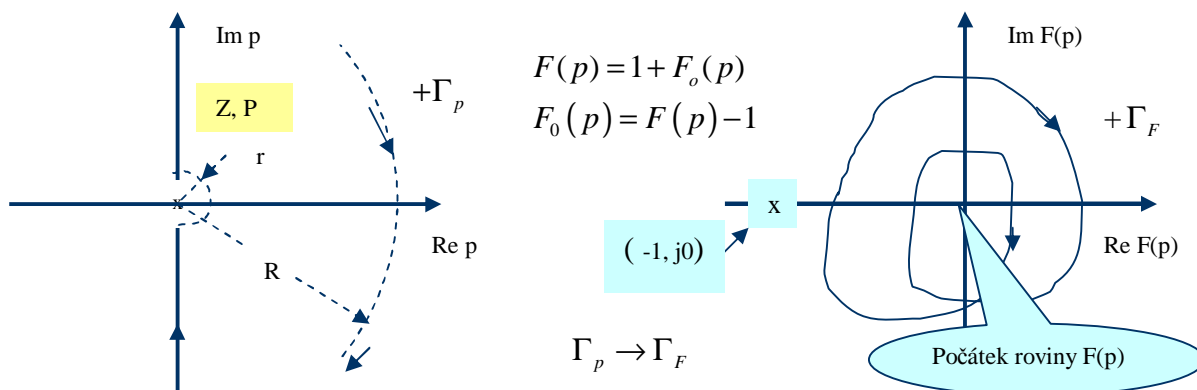
Má-li být uzavřený regulační obvod stabilní, nesmí se v pravé komplexní polorovině kořenů nacházet žádný pól přenosu (4.25), a tedy žádná nula $F(p)$, t.zn. $Z = 0$.

Je-li otevřený regulační obvod stabilní, nenachází se v pravé komplexní polorovině kořenů žádný pól $F(p)$ t. zn. $P = 0$; je-li nestabilní, bude $P > 0$ a je-li na mezi asymptotické stability nachází se póly $F(p)$ na imaginární ose.

Tato úvaha nás vede k volbě jednoduché, spojitě, uzavřené, kladně orientované křivky Γ_p , která obklopí celou pravou (nestabilní) komplexní polorovinu kořenů $F(p)$.

Průběh křivky Γ_p zvolíme tak, aby procházela zdola nahoru po imaginární ose a křivku uzavřeme přes pravou komplexní polorovinu půlkružnicí o poloměru $R \rightarrow \infty$.

Vyskytnou-li se na imaginární ose póly, zahrneme je podmíněně do levé (stabilní) poloroviny obkroužením těchto pólů zprava půlkružnicemi re^{jq} , $q \in \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$, o poloměru $r \rightarrow 0$.



Z principu argumentu vyplývá, že po konformním zobrazení křivky Γ_p vznikne v komplexní rovině $(\text{Re } F(p), \text{jIm } F(p))$ uzavřená křivka Γ_F , která obklíčí počátek této roviny $N = Z - P$ krát. Protože však pro přenos otevřeného regulačního obvodu platí $F_o(p) = F(p) - 1$, je tento počet obklíčení shodný s počtem obklíčení bodu $(-1, j0)$ **Nyquistovo křivkou** $F_o(p)|_{p=jw}$, která je tvořena frekvenční charakteristikou otevřeného regulačního obvodu $F_o(jw)$ pro $0 \leq w < \infty$ a jejím zrcadlovým obrazem pro záporné frekvence $F_o(-jw)$.

Poznamenejme, že frekvenční charakteristika v okolí pólů na imaginární ose se blíží k nekonečnu a půlkružnice o poloměru $r \rightarrow 0$ se zobrazí ve frekvenční charakteristice $F_o(jw)$ jako půlkružnice

s poloměrem $R \rightarrow \infty$. O tom, jestli se uzavírá přes pravou či levou polorovinu (smysl orientace !!) se musíme přesvědčit dosazením $p = re^{jq}$, $q = 0^\circ$, do $F_o(p)$.

O stabilitě uzavřeného regulačního obvodu tedy můžeme rozhodnout na základě průběhu frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu, který může být stabilní, nestabilní či na mezi asymptotické stability.

1/ Otevřený regulační obvod je stabilní

V tomto případě neleží žádný pól přenosové funkce otevřeného regulačního obvodu $F_o(p)$, a tedy i žádný pól funkce $F(p)$ v pravé komplexní polorovině $\rightarrow P = 0$.

a/ Jestliže Nyquistova křivka $F_o(jw)$ pro $w \in (-\infty, \infty)$ bod $(-1, j0)$ neobkličuje, je $N = 0$ a uzavřený regulační obvod bude stabilní, neboť bude mít v pravé komplexní polorovině $Z = N + P = 0 + 0 = 0$ nestabilních pólů.

b/ Jestliže Nyquistova křivka $F_o(jw)$ pro $w \in (-\infty, \infty)$ obkličí bod $(-1, j0)$ např. 2-krát v kladném smyslu, je $N = 2$ a uzavřený regulační obvod bude nestabilní, neboť bude mít v pravé komplexní polorovině $Z = N + P = 2 + 0 = 2$ nestabilní póly.

c/ Jestliže Nyquistova křivka $F_o(jw)$ pro $w \in (-\infty, \infty)$ bude procházet bodem $(-1, j0)$, uzavřený regulační obvod bude na mezi stability.

2/ Otevřený regulační obvod je nestabilní

V tomto případě bude určitý počet pólů přenosové funkce otevřeného regulačního obvodu $F_o(p)$, a tedy i funkce $F(p)$ ležet v pravé komplexní polorovině $\rightarrow P > 0$.

a/ Jestliže Nyquistova křivka $F_o(jw)$ pro $w \in (-\infty, \infty)$ bod $(-1, j0)$ neobkličuje nebo počet obklíčení je $N \neq -P$, uzavřený regulační obvod bude nestabilní, neboť bude mít v pravé komplexní polorovině $Z = N + P = 0 + P = P$ nebo $Z > 0$ nestabilních pólů.

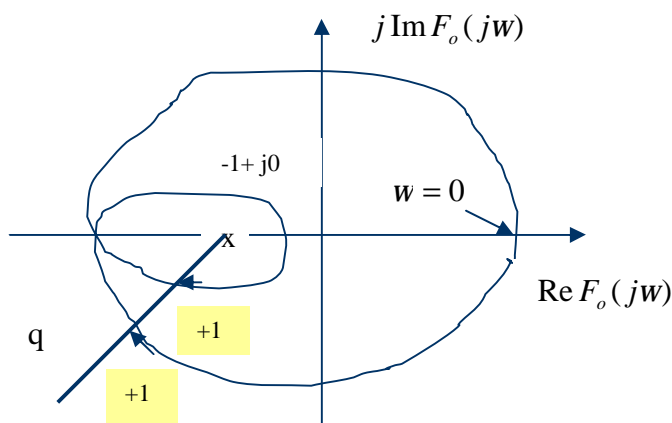
b/ Jestliže Nyquistova křivka $F_o(jw)$ pro $w \in (-\infty, \infty)$ obkličí bod $(-1, j0)$ P-krát v záporném smyslu, je $N = -P$ a uzavřený regulační obvod bude stabilní, neboť bude mít v pravé komplexní polorovině $Z = N + P = -P + P = 0$ nestabilních pólů (při průchodu bodem $(-1, j0)$ bude na mezi asymptotické stability).

3/ Otevřený regulační obvod je na mezi asymptotické stability

Podmíněné zahrnutí pólů na imaginární ose do stabilní poloroviny se sice projeví na tvaru Nyquistovy křivky a počtu obklíčení bodu $(-1, j0)$, ale postup při vyhodnocení stability uzavřeného regulačního obvodu se od předchozích případů neliší.

Nyquistovo frekvenční kritérium stability:

Nutnou a postačující podmínkou stability uzavřeného regulačního obvodu je požadavek, aby Nyquistova křivka $F_o(jw)$ pro $w \in (-\infty, \infty)$ obkličovala bod $(-1, j0)$ v záporném smyslu tolikrát, kolik má otevřený regulační obvod nestabilních pólů.



Počet obklíčení bodu $(-1, j0)$ Nyquistovo křivkou lze jednoduše určit jako součet počtu průsečíků této křivky s libovolnou polopřímkou q vedenou z obklíčovaného bodu. Při součtu je respektováno znaménko orientace křivky v místě průsečíků.

Na uvedeném příkladu je počet obklíčení $N = +2$.

Příklad 4.4.:

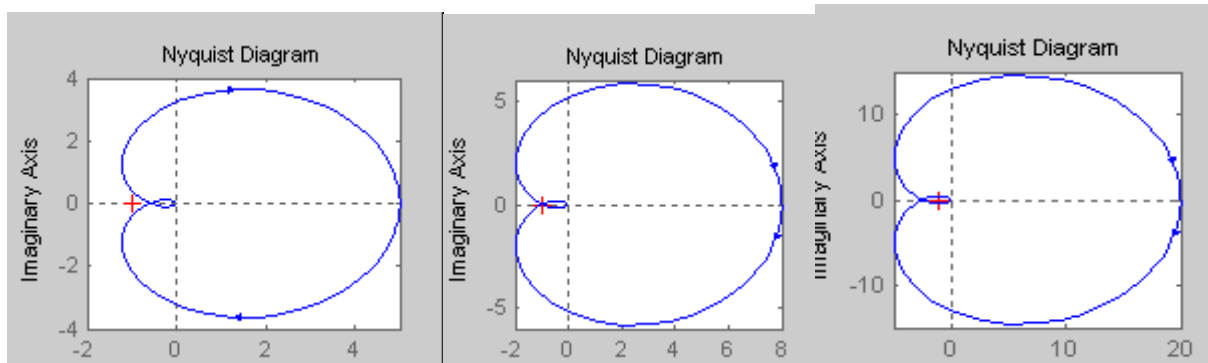
S použitím Nyquistova frekvenčního kriteriya stability analyzujte stabilitu uzavřeného regulačního obvodu, je –li otevřený regulační obvod popsán přenosem

$$F_o(p) = \frac{K}{(p+1)^3}. \text{ Uvažujte tři hodnoty zesílení } K: K=5, K=8, K=20$$

Řešení:

Otevřený regulační obvod je stabilní (P=0) a o stabilitě či nestabilitě uzavřeného regulačního obvodu rozhodneme podle počtu a orientace obklíčení bodu (-1, j0).

Nyquistovy křivky (Nyquistovy frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu) jsou pro všechny tři případy zakresleny na následujících obrázcích:



K=5:
Nyquistova křivka neobklíčuje bod (-1, j0), **uzavřený regulační obvod bude stabilní:** Z=N+P=0

K=8:
Nyquistova křivka prochází bodem (-1, j0), **uzavřený reg. obvod bude na mezi stability.** (K=8 je kritické zesílení)

K=20:
Nyquistova křivka obklíčuje bod (-1, j0) dvakrát v kladném smyslu (N=2), **uzavřený regulační obvod bude nestabilní:** Z=N+P=2 (póly: -3.7, 0.35 ± j2.35)

Příklad 4.5.:

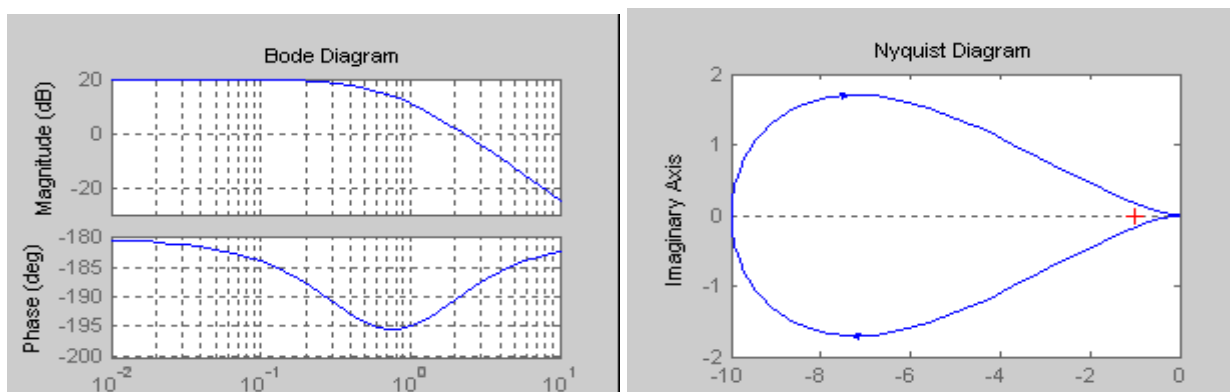
S použitím Nyquistova frekvenčního kriteriya stability analyzujte stabilitu uzavřeného regulačního obvodu, je –li otevřený regulační obvod popsán přenosem

$$a/ F_o(p) = \frac{10}{(\sqrt{3}p+1)(p-1)} \quad b/ F_o(p) = \frac{10}{(\sqrt{3}p-1)(p+1)}$$

Poznamenejme, že pro analýzu průběhu fáze je vhodné oba přenosy lze přepsat do tvaru s all-pass filtrem (3.62).

Řešení:

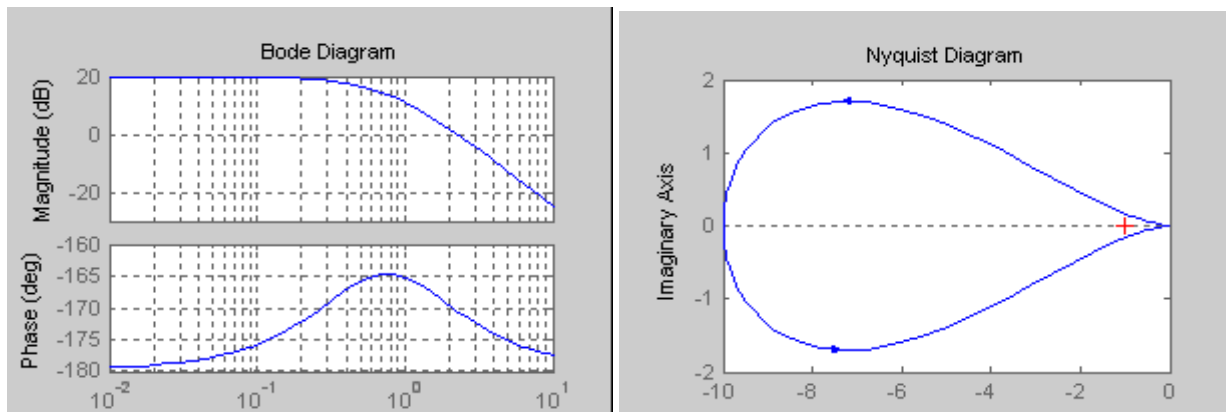
a/ **Otevřený regulační obvod je nestabilní (P=1).** O stabilitě či nestabilitě uzavřeného regulačního obvodu rozhodneme podle počtu a orientace obklíčení bodu (-1, j0). Pro lepší názornost uvedeme i Bodeho charakteristiky:



Průběh fáze nelze odvodit z pravidel pro stabilní a minimálně-fázové systémy a musíme jej spočítat: Při nulové frekvenci je fáze -180° a s rostoucí frekvencí fáze nejprve klesá a potom stoupá.

Nyquistova křivka obklíčuje bod (-1, j0) jedenkrát v kladném smyslu (N=1), **uzavřený regulační obvod bude nestabilní:** Z = N + P = 1 + 1 = 2. (dva nestabilní póly p_{1,2} = 0.2 ± j2.27)

b/ **Otevřený regulační obvod je nestabilní (P=1)**. O stabilitě či nestabilitě uzavřeného regulačního obvodu rozhodneme opět podle počtu a orientace obklíčení bodu (-1, j0).



Při nulové frekvenci je fáze -180^0 a s rostoucí frekvencí fáze nejprve stoupá a potom klesá.

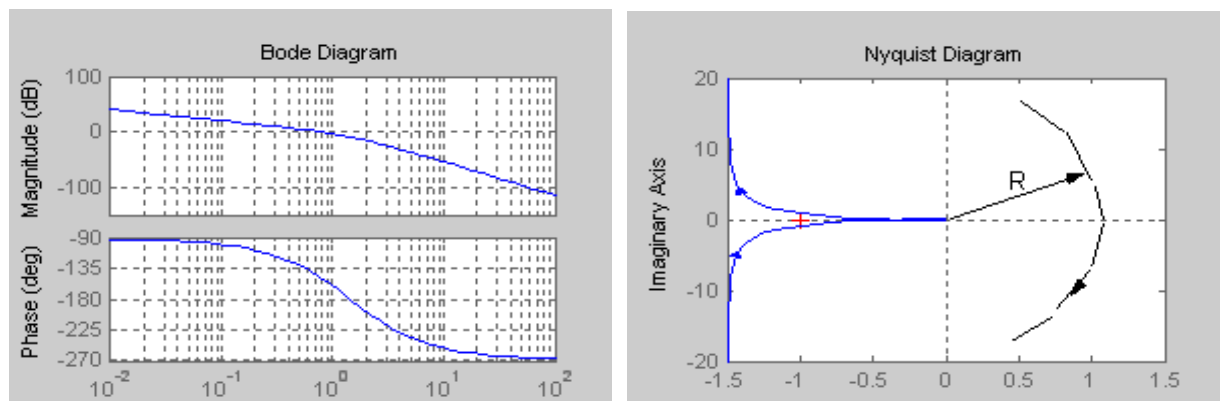
Nyquistova křivka obklíčuje bod $(-1, j0)$ jedenkrát v záporném smyslu ($N=-1$), **uzavřený regulační obvod bude stabilní**: $Z = N + P = -1 + 1 = 0$.
(dva stabilní póly $p_{1,2} = -0.2 \pm j2.27$)

Příklad 4.6.:

S použitím Nyquistova frekvenčního kriteriya stability analyzujte stabilitu uzavřeného regulačního obvodu, je $-li$ otevřený regulační obvod popsán přenosem $F_o(p) = \frac{2}{p(p+1)(p+2)}$

Řešení:

a/ **Otevřený regulační obvod je na mezi asymptotické stability** (nulový pól zahrneme do stabilní poloroviny **P=0**). O stabilitě či nestabilitě uzavřeného regulačního obvodu rozhodne počet (a orientace) obklíčení bodu $(-1, j0)$.



Otevřený regulační obvod je stabilní, minimálně-fázový a průběh LFFCH lze jednoduše odvodit z LAFCH

Nyquistova křivka neobklíčuje bod $(-1, j0)$, $N=0$, **uzavřený regulační obvod bude stabilní**: $Z = N + P = 0$ (stabilní póly : $-2.5, -0.24 \pm j0.85$).

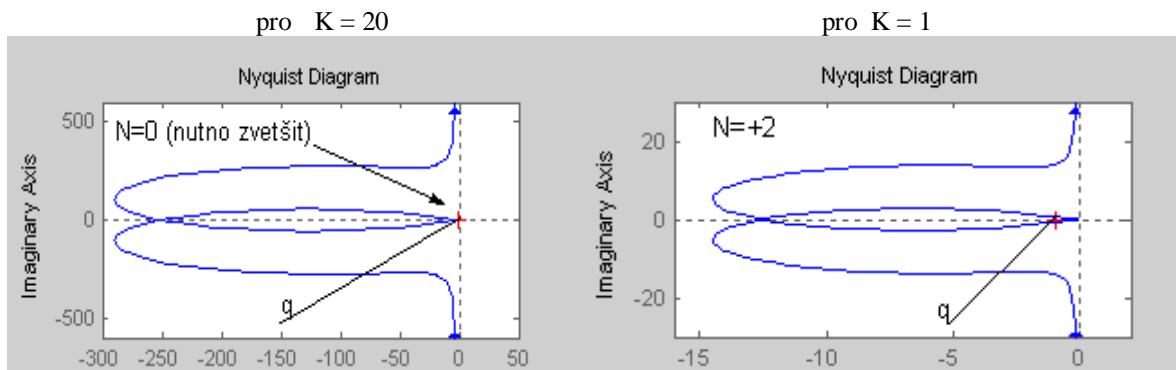
Poznámka:

Někdy se můžeme setkat s regulačními obvody, které jsou stabilní při vyšším zesílení a nestabilní při snížení zesílení. Takovým systémům říkáme **podmíněně stabilní**.

Příkladem může být přenos otevřeného regulačního obvodu

$$F_o(p) = K \frac{0.2p^3 + 1.5p^2 + 1.9p + 1}{p(p^3 + 30p^2 + 2p + 1)}, \text{ který je stabilní pro } K = 20 \text{ a nestabilní pro } K = 1$$

Určením pólů zjistíme, že otevřený regulační obvod je na mezi asymptotické stability ($P = 0$) a o stabilitě uzavřeného regulačního obvodu rozhoduje počet obklíčení bodu $(-1, j0)$ a jeho orientace. Použitím Matlabu dostaneme:



Nyquistova křivka neobkličuje bod $(-1, j0)$, $N=0$, uzavřený regulační obvod bude stabilní.

Nyquistova křivka obkličuje bod $(-1, j0)$ dvakrát v kladném smyslu, $N=+2$, $Z=N+P=2+0=2$, uzavřený regulační obvod bude nestabilní.

4.4. Robustnost ve stabilitě. Kritické zesílení, bezpečnost v zesílení a bezpečnost ve fázi.

Protože uzavřený regulační obvod by měl zůstat stabilní i vzhledem k neurčitosti nominálního modelu řízeného systému (model reálného systému neznáme přesně, parametry reálného systému se mohou v čase měnit a při tvorbě modelu to nerespektujeme...), je žádoucí vytvořit návrhem regulátoru určitou „bezpečnost“ ve stabilitě, kterou nazýváme *robustností ve stabilitě*.

Z předchozího výkladu víme, že uzavřený regulační obvod se dostane na mez stability, jestliže frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu $F_o(j\omega)$ bude právě procházet kritickým bodem $(-1, j0)$. To znamená, že při nějaké frekvenci $\omega = \omega_{krit}$ a při zesílení otevřeného regulačního obvodu $K = K_{krit}$ bude platit

$$F_o(j\omega_{krit}, K_{krit}) = -1 \text{ resp. } |F_o(j\omega_{krit}, K_{krit})| = 1 \text{ a } \arg F_o(j\omega_{krit}, K_{krit}) = -180^\circ \quad (4.27)$$

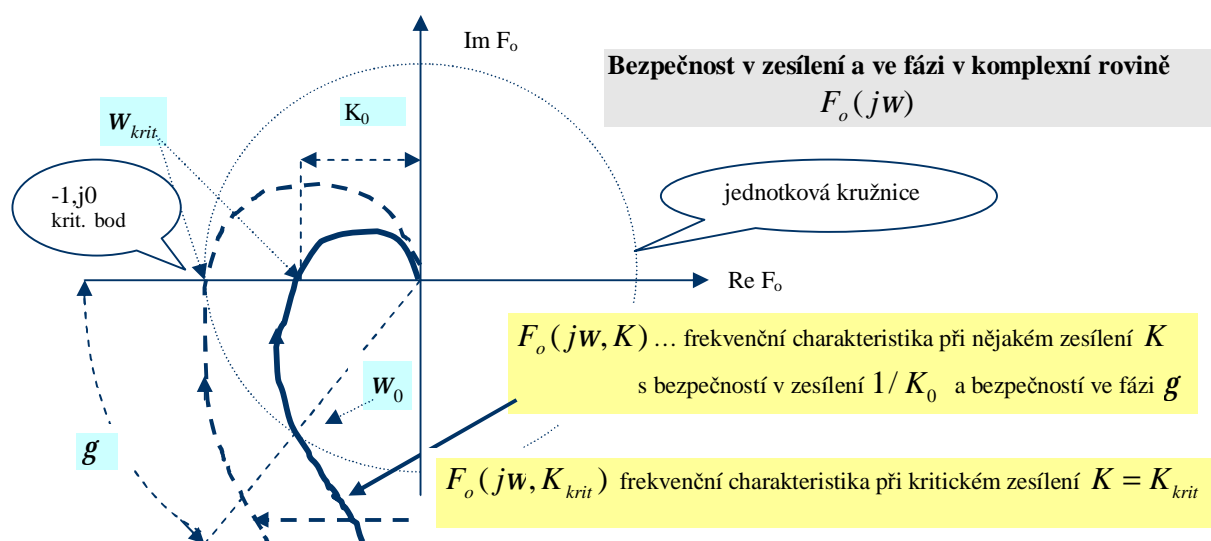
Robustnost ve stabilitě závisí na průběhu $F_o(j\omega)$ v okolí kritického bodu a je definována dvěma parametry, charakterizujícími *bezpečnost v zesílení* $1/K_o$ a *bezpečnost ve fázi* g .

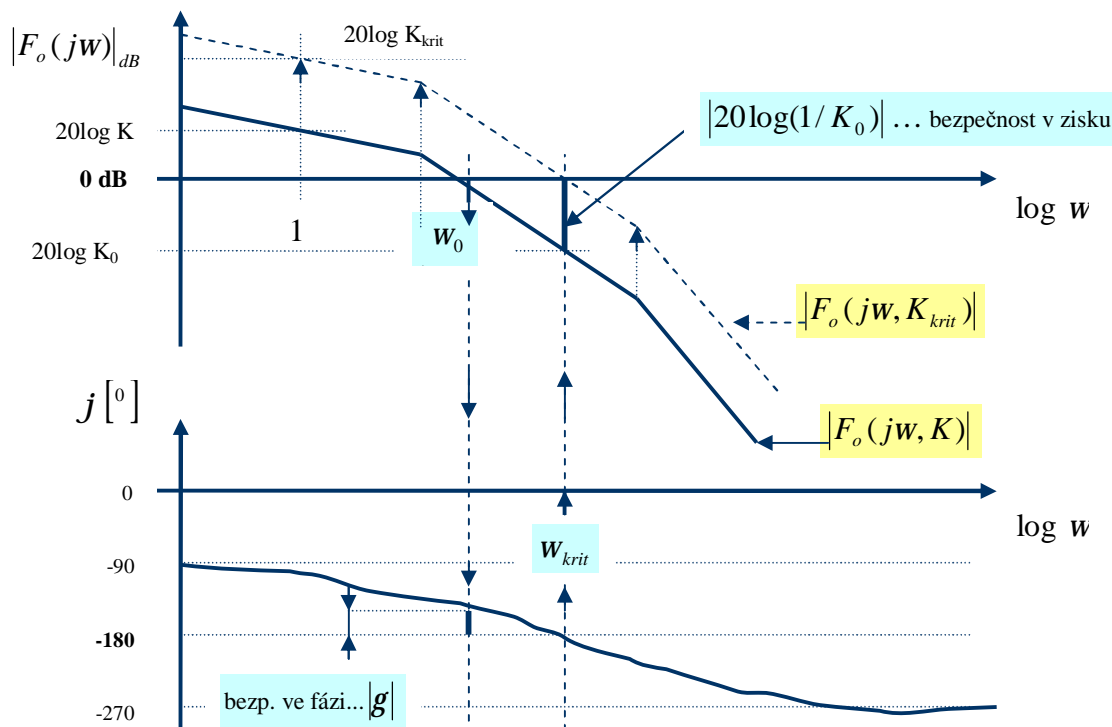
Bezpečnost v zesílení $1/K_o$

Je definována jako multiplikační konstanta, kterou lze změnit zesílení otevřeného regulačního obvodu K tak, že uzavřený regulační obvod se stane nestabilním (zesílení bude kritické).

Bezpečnost ve fázi g

Je definována jako fázové zpoždění g , které po zavedení do otevřeného regulačního obvodu způsobí, že uzavřený regulační obvod se stane nestabilním.





Z uvedených schémat vyplývá, že pro výpočet bezpečnosti v zesílení je nutné zjistit kritickou frekvenci w_{krit} : $\arg F_o(jw_{krit}) = -180^\circ$ a amplitudové zesílení při této frekvenci $K_0 = |F_o(jw_{krit})|$. Pro výpočet bezpečnosti ve fázi je nutné určit frekvenci w_0 : $|F_o(jw_0)| = 1$ a fázi přenosu otevřeného regulačního obvodu při této frekvenci $j(w_0) = \arg F_o(jw_0)$.

Výpočet bezpečnosti v zesílení $1/K_0$ a kritického zesílení K_{krit}

- 1/ Kritickou frekvenci w_{krit} určíme z podmínky: $\text{Im } F_o(jw_{krit}) = 0$ nebo $\arg F_o(jw_{krit}) = -180^\circ$
- 2/ Vypočteme $K_0 = |F_o(jw_{krit})| = \text{Re } F_o(jw_{krit})$ a bezpečnost v zesílení $1/K_0$
- 3/ Měl-li otevřený regulační obvod známé zesílení K , kritické zesílení je $K_{krit} = (1/K_0)K$.
(Obecně určíme K_{krit} z rovnic (4.27) nebo pomocí Hurwitzova algebraického kriteri stability).

Výpočet bezpečnosti ve fázi g

- 1/ Frekvenci w_0 , tj. frekvenci při které protíná $F_o(jw)$ poprvé jednotkovou kružnici a LAFCH protíná osu 0dB, určíme z podmínky $|F_o(jw_0)| = 1$
- 2/ Určíme-li fázi přenosu otevřeného regulačního obvodu při w_0 , lze bezpečnost ve fázi g vyjádřit jako doplňkový úhel do -180° : $g = 180^\circ + \arg F_o(jw_0)$

(Obvyklá doporučení pro volbu bezpečnosti v zesílení a ve fázi jsou : $1/K_0 > 2$, $g > 40^\circ$)

Všimněme si, že bezpečnost ve fázi g lze také interpretovat jako maximálně přípustnou velikost dopravního zpoždění t_{dmax} , zavedeného do přenosu otevřeného regulačního obvodu členem $e^{-j\omega t_{dmax}}$, při kterém se stane uzavřený regulační obvod nestabilním. Protože pro úhel bezpečnosti ve fázi platí $g = w_0 t_{dmax} [rad]$, můžeme při známém g určit toto dopravní zpoždění ze vztahu

$$t_{dmax} = g / w_0 \quad (4.28)$$

Z uvedeného vyplývá, že pro analýzu stability a robustnosti ve stabilitě regulačních obvodů s dopravním zpožděním je prakticky použitelné pouze Nyquistovo frekvenční kritérium stability. Frekvenční přenos otevřeného regulačního obvodu s dopravním zpožděním lze zapsat ve tvaru

$$\overline{F}_o(j\omega) = F_o(j\omega)e^{-j\omega t_d} \quad (4.29)$$

Je tedy pouze nutné konstruovat Nyquistovu křivku pro $\overline{F}_o(j\omega)$, kterou získáme z $F_o(j\omega)$ pootočením každého bodu frekvenční charakteristiky o úhel $-\omega t_d$ po kružnici se středem v počátku a poloměru $|F_o(j\omega)|$.

Příklad 4.7.:

Určete bezpečnost v zesílení, bezpečnost ve fázi a kritické zesílení, je-li přenos otevřeného regulačního obvodu

$$F_o(p) = \frac{2}{(p+1)^3}$$

Řešení:

$$F_o(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3j\omega + 1} = \frac{2[(1-3\omega^2) + j(\omega^3 - 3\omega)]}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2} = \text{Re } F_o(j\omega) + j \text{Im } F_o(j\omega)$$

$$|F_o(j\omega)| = \frac{2}{(\sqrt{1+\omega^2})^3}$$

Výpočet bezpečnosti v zesílení $1/K_0$

$$1/ \text{Im } F_o(j\omega_{krit}) = 0 \rightarrow \omega_{krit}^3 - 3\omega_{krit} = 0 \rightarrow \omega_{krit} = \pm\sqrt{3} \text{ rad/sec}$$

$$2/ K_0 = |F_o(j\omega_{krit})| = \frac{2}{(\sqrt{1+\omega^2})^3} \Big|_{\omega=\sqrt{3}} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{Bezpečnost v zesílení: } 1/K_0 = 4$$

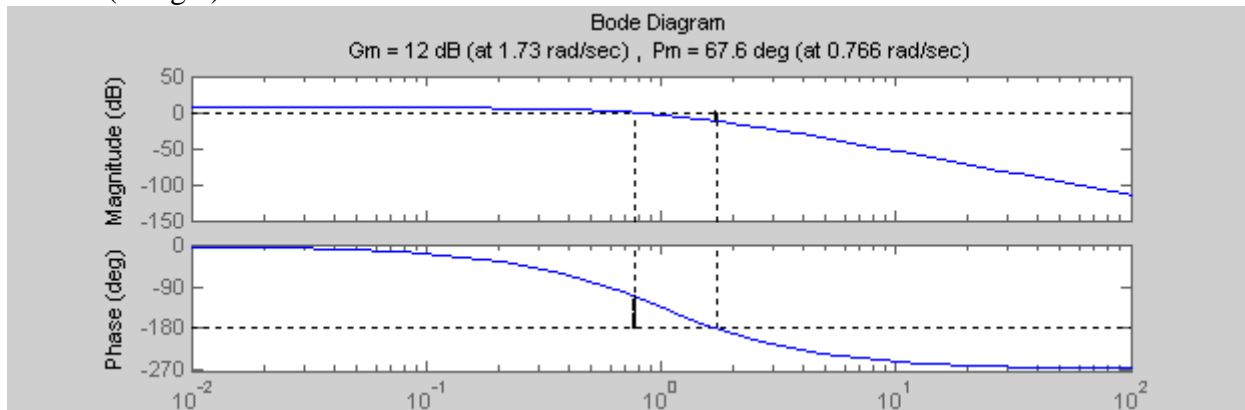
$$\text{Kritické zesílení } K_{krit} = (1/K_0)2 = 8$$

Výpočet bezpečnosti ve fázi g

$$1/ |F_o(j\omega_0)| = 1 \rightarrow \frac{2}{(\sqrt{1+\omega_0^2})^3} = 1 \rightarrow 2^{\frac{1}{3}} = (1+\omega_0^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt[3]{4} - 1 = \omega_0^2 \rightarrow \omega_0 = 0.77 \text{ rad/sec}$$

$$2/ \text{Bezpečnost ve fázi: } g = 180^\circ + \arg F_o(j\omega_0) = 180^\circ - 3\text{arctg}\left(\frac{0.77}{1}\right) \frac{180}{p} = 67.2^\circ$$

Matlab (Margin):



4.5. Metoda geometrického místa kořenů (GMK)

Metodu geometrického místa kořenů (GMK) zavedl v r. 1948 Evans jako grafickou proceduru pro zobrazení změn rozložení kořenů nějakého polynomu v komplexní rovině v závislosti na změně nějakého parametru.

Nejčastější použití metody GMK vychází ze znalosti rozložení nul a pólů přenosu otevřeného regulačního obvodu (4.24),

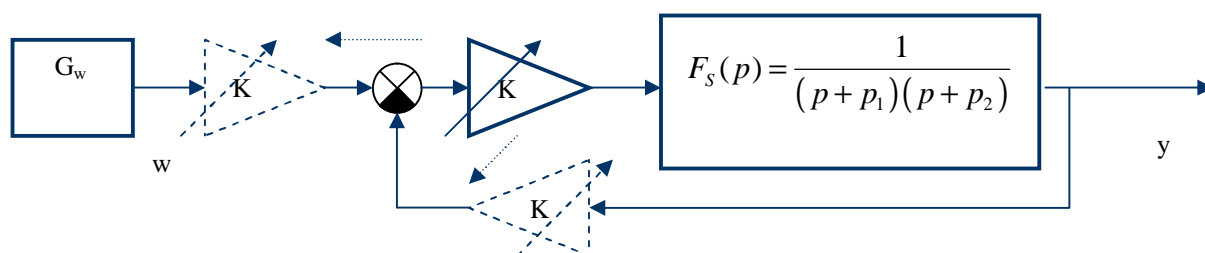
$$F_o(p) = K \frac{b_o(p)}{a_o(p)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (4.30)$$

přičemž je sledován vliv změn parametru $K, K \in \langle 0, \infty \rangle$ na rozložení pólů uzavřeného regulačního obvodu.

Připomeňme, že parametr K má význam statického zesílení v případě, že polynomy $a_o(p), b_o(p)$ mají prosté členy rovny 1. Jsou-li oba polynomy monické (koeficient u nejvyšší mocniny je 1), lze je rozložit na součin kořenových činitelů a v tomto případě je K je obecným parametrem.

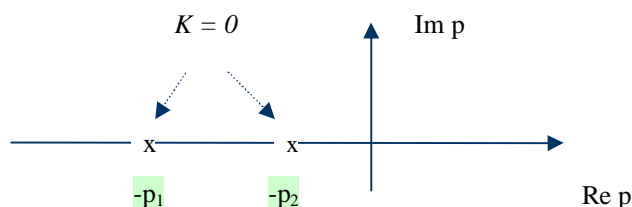
Motivační příklad:

Uvažujme uzavřený regulační obvod dle následujícího schéma, kde systém má dva reálné, různé stabilní póly $-p_1, -p_2$ a zesílení K je znázorněno odděleným blokem (čárkovaně je vyznačena možnost jeho přesunu před součtový uzel):



Lze tedy akceptovat, že pro $K = 0$ je zpětná vazba „přerušena“ a GMK představují dva reálné, různé póly $-p_1, -p_2$ přenosu *otevřeného regulačního obvodu*

$$F_o(p) = \frac{K}{(p + p_1)(p + p_2)}$$



Při $K > 0$ je zpětná vazba „uzavřena“ a pro $K \in (0, \infty)$ bude GMK vytvářeno polohou pólů v přenosu *uzavřeného regulačního obvodu*

$$F_{y,w}(p) = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)} = \frac{K}{(p + p_1)(p + p_2) + K} = \frac{K}{p^2 + (p_1 + p_2)p + p_1 p_2 + K}$$

Póly uzavřeného regulačního obvodu $p_{1,2}^*$ závisí na hodnotě zesílení K , a jsou určeny vztahem:

$$p_{1,2}^*(K) = \frac{-(p_1 + p_2) \pm \sqrt{(p_1 - p_2)^2 - 4K}}{2} = \frac{-(p_1 + p_2) \pm \sqrt{D}}{2}; \quad D = (p_1 - p_2)^2 - 4K$$

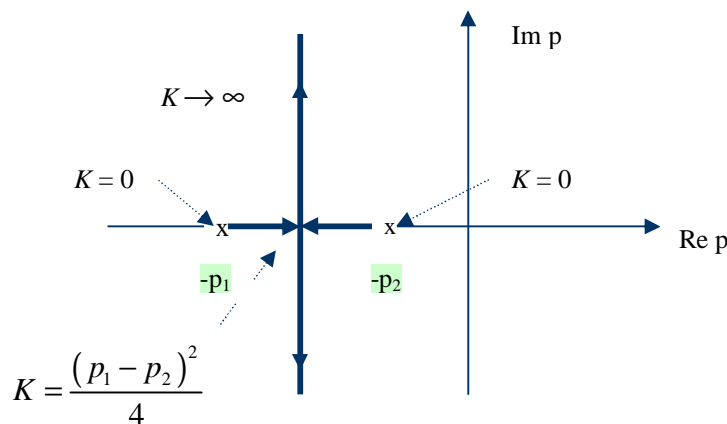
Diskriminant D závisí na parametru K a jeho hodnota určuje, zda budou póly uzavřeného regulačního obvodu *reálné různé, reálné násobné* či *komplexně sdružené*.

Pro $0 < K < \frac{(p_1 - p_2)^2}{4}$ je $D > 0$ a póly $p_{1,2}^*(K)$ jsou *reálné různé*.

Pro $K = \frac{(p_1 - p_2)^2}{4}$ je $D = 0$ a dostáváme *dvojnásobný reálný pól* $p_1^* = p_2^* = -\frac{(p_1 + p_2)}{2}$.

Pro $K > \frac{(p_1 - p_2)^2}{4}$ je $D < 0$ a póly $p_{1,2}^*(K)$ jsou *komplexně sdružené*.

Geometrické místo kořenů pro $K \in \langle 0, \infty \rangle$ je vyznačeno na následujícím obrázku.



Póly vycházejí při $K = 0$ z pólů otevřeného regulačního obvodu, probíhají nejprve po reálné ose, kde dochází k větvení a pro $K \rightarrow \infty$ se jejich imaginární část blíží k nekonečnu. Póly zůstávají pro libovolné K v levé komplexní polorovině a uzavřený regulační obvod je stabilní. Hledejme nyní rovnici popisující tvar GMK v obecném případě.

Rovnice geometrického místa kořenů a základní pravidla jeho konstrukce.

Uvažujme striktně ryzí přenosovou funkci otevřeného regulačního obvodu s monickými polynomy $a_o(p)$ a $b_o(p)$, st $a_o(p) = n$, st $b_o(p) = m$, $m < n$ a parametrem $K, K \in \langle 0, \infty \rangle$

$$F_o(p) = F_s(p)F_r(p) = K \frac{b_o(p)}{a_o(p)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (4.31)$$

Monické polynomy lze rozložit na součin kořenových činitelů se specifikovanými hodnotami n pólů $p_i, i = 1, \dots, n$ a m nul $z_j, j = 1, \dots, m$.

Přenos uzavřeného regulačního obvodu je

$$F_{y,w}(p) = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)} = \frac{K \frac{b_o(p)}{a_o(p)}}{1 + K \frac{b_o(p)}{a_o(p)}} = \frac{K b_o(p)}{a_o(p) + K b_o(p)} \quad (4.32)$$

Porovnáním přenosu otevřeného a uzavřeného regulačního obvodu zjišťujeme, že

- „poloha“ nul se uzavřením zpětné vazby nemění
- „poloha“ pólů se uzavřením zpětné vazby mění, závisí na parametru zesílení K a je dána řešením charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu

$$a_o(p) + Kb_o(p) = 0 \quad \text{resp.} \quad 1 + K \frac{b_o(p)}{a_o(p)} = 0 \quad (4.33)$$

Definice GMK:

Geometrické místo kořenů je definováno jako taková množina komplexních čísel $\{p\}$, která pro $\forall K, K \in \langle 0, \infty \rangle$ vyhovuje rovnici GMK:

$$1 + K \frac{b_o(p)}{a_o(p)} = 0 \quad (4.34)$$

Rovnici GMK zapíšeme ve tvaru

$$\frac{b_o(p)}{a_o(p)} = -\frac{1}{K} = \left| \frac{1}{K} \right| e^{\pm j(2k+1)p}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.35)$$

Po rozdělení na absolutní hodnotu a fázi dostáváme pro GMK dvě rovnice

$$\left| \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \right| = \frac{1}{K} \quad \text{a} \quad \arg \left\{ \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \right\} = \arg \{b_o(p)\} - \arg \{a_o(p)\} = \pm(2k+1)p \quad (4.36)$$

Rozkladem polynomů na součiny kořenových činitelů dostáváme rovnice GMK ve tvaru

$$\left| \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \right| = \frac{\prod_{j=1}^m |p - z_j|}{\prod_{i=1}^n |p - p_i|} = \frac{1}{K} \quad (4.37a)$$

$$\arg \left\{ \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \right\} = \sum_{j=1}^m \arg(p - z_j) - \sum_{i=1}^n \arg(p - p_i) = \pm(2k+1)p, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.37b)$$

Aby nějaké komplexní číslo p bylo prvkem GMK, musí existovat takové $K \geq 0$, že je splněna rovnice (4.37a) a současně fáze (4.37b) musí být lichým násobkem p .

Pro orientační určení průběhu GMK bylo odvozeno z rovnic GMK několik pravidel pro jeho konstrukci a není tedy nezbytné řešit tyto rovnice (pro exaktní řešení Matlab: rlocus).

Základní pravidla pro konstrukci GMK ($K \geq 0$):

I/ GMK vychází z pólů přenosu otevřeného regulačního obvodu při $K = 0$ a končí v jeho nulách při $K \rightarrow \infty$.

Důkaz: $K = 0$: $\left| \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \right| = \frac{1}{K} = \infty \Leftrightarrow a_o(p) = 0$ (řešením jsou póly)

$K = \infty$: $\left| \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \right| = \frac{1}{K} = 0 \Leftrightarrow b_o(p) = 0$ (řešením jsou nuly)

Důsledek:

GMK sestává z n větví vycházejících z pólů, přičemž m větví končí v nulách a $n - m$ větví se asymptoticky blíží k ∞ („ k nevlastním nulám“, „ k nulám v nekonečnu“).

2/ $(n - m)$ asymptot GMK se protíná na reálné ose v bodě q

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}; \quad p_i, z_j \text{ jsou číselné hodnoty pólů a nul, } n-m \text{ je relativní řád } F_o(p)$$

$(n - m)$ asymptot GMK svírá s reálnou osou úhly a_l

$$a_l = \frac{p + (l - 1)2p}{n - m}, \quad l = 1, 2, \dots, n - m$$

3/ GMK je symetrické vůči reálné ose

4/ GMK probíhá po reálné ose VLEVO od LICHÉHO počtu nul a pólů

5/ Body, kde GMK opouští nebo přichází na reálnou osu, jsou určeny řešením rovnice

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p - p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{p - z_j} = 0$$

6/ Průsečíky GMK s imaginární osou (nastávají pro $K = K_{krit}$) určíme dosazením $p = j\omega$ do rovnice GMK.

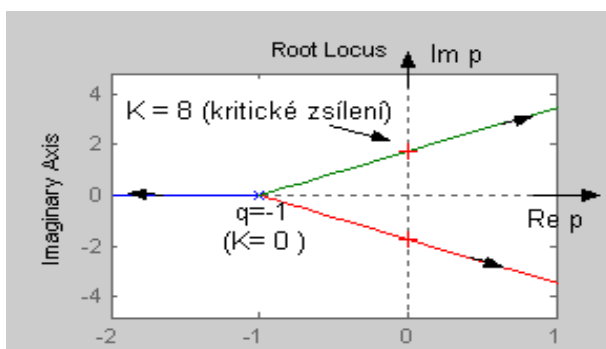
7/ Pro $n - m \geq 2$:

Součet hodnot pólů otevřeného reg. obvodu = součet hodnot pólů uzavřeného reg. obvodu

8/ Otevřený reg. obvod má alespoň jeden pól v počátku (astatismus):

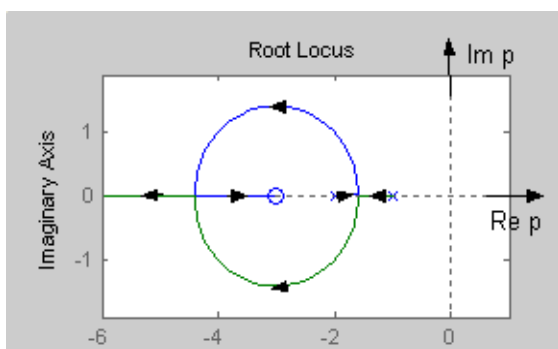
Součin hodnot pólů otevřeného reg. obvodu = součin hodnot pólů uzavřeného reg. obvodu

Pravidla konstrukce GMK ilustruje několik řešených příkladů (Matlab, rlocus):



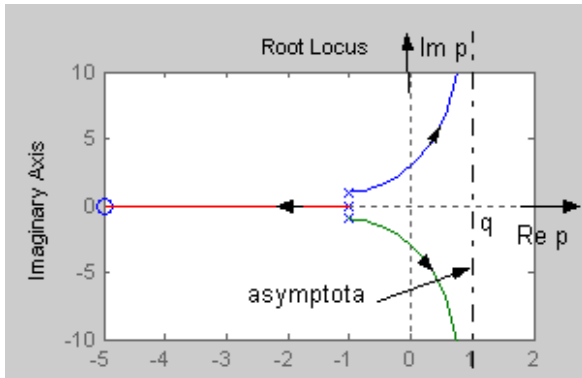
$$F_o(p) = K \frac{1}{(p+1)^3}$$

Relat. řád $n-m = 3$ (3 nuly „nevlastní“)
3 větve, 3 asymptoty, $q = (-3-0)/3 = -1$
úhly asymptot: $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$
Průsečík s imaginární osu při $K=8$ (krit. zesílení).
Zjištění libovolného pólu uzavřeného reg obvodu a příslušného zesílení : Matlab, rlocfind.



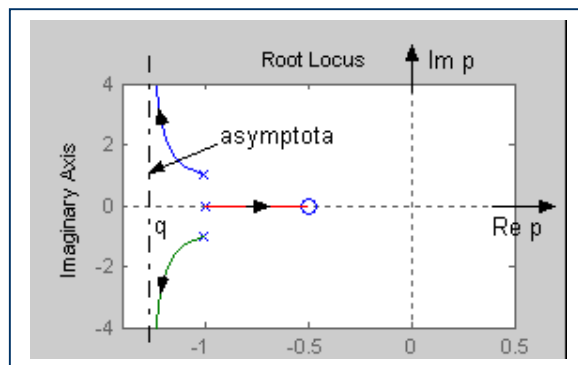
$$F_o(p) = K \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$$

Relat. řád $n-m = 1$ (1 nula „nevlastní“)
2 větve, 1 asymptota s úhlem 180°
1 bod kde GMK opouští Re p
1 bod kde GMK přichází na Re p
GMK prochází po Re p vlevo od lichého počtu nul a pólů, musí končit v nulách, a proto opouští Re p a opět se vrací na Re p v přípustné oblasti.



$$F_o(p) = K \frac{p+5}{(p^2+2p+2)(p+1)}$$

Relat. řád n-m = 2 (2 nuly „vlastní“)
 3 větve, 2 asymptoty s úhly 90° , 270°
 1 větev GMK vychází z reálného pólu -1 a směřuje do „vlastní“ nuly s hodnotou -5
 2 větve směřují do nestabilní oblasti, kde se nacházejí asymptoty, protínající reálnou osu v bodě $q = +1$. Uzavřený regulační obvod bude stabilní pro $K < K_{krit}$.



$$F_o(p) = K \frac{p+0.5}{(p^2+2p+2)(p+1)}$$

Oproti předchozímu je změněna nula přenosu.
 3 větve, 2 asymptoty s úhly 90° , 270°
 1 větev GMK vychází z reálného pólu -1 a směřuje do vlastní nuly s hodnotou -0.5
 2 větve směřují ve stabilní oblasti k asymptotám, které protínají reálnou osu v bodě $q = -1.25$. Uzavřený regulační obvod bude stabilní pro libovolné K.

Protože přenos otevřeného regulačního obvodu je dán součinem přenosu známého řízeného systému $F_S(p)$ a přenosu navrhovaného regulátoru $F_R(p)$, je zřejmé, že metoda GMK bude účinným nástrojem zejména pro volbu struktury regulátoru z hlediska „tvarování“ průběhu GMK zavedením nul a pólů regulátoru k daným nulám a pólům řízeného systému.

Tvar GMK reprezentuje možnou umístitelnost pólů uzavřeného regulačního obvodu zvoleným typem regulátoru a rozhoduje nejen o stabilitě uzavřeného regulačního obvodu, ale i o dalších vlastnostech, které požadujeme od chování uzavřeného regulačního obvodu.

Příklad 4.8. (neřešený):

Použitím metody GMK ukažte, že pro stabilizaci netlumeného lineárního harmonického oscilátoru s přenosem

$$F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2+1} \text{ nemůže být použit}$$

ani P regulátor s přenosem $F_R(p) = K$

ani PI regulátor s přenosem $F_R(p) = K \left(\frac{p+1/T_I}{p} \right)$, $T_I > 0$.

Pro řízení systému je vhodnou volbou PD regulátor s přenosem $F_R(p) = K \left(1 + \frac{T_D p}{t p + 1} \right)$, $T_D, t > 0$, $t < T_D$,

který do otevřeného regulačního obvodu zavede jeden stabilní pól a jednu stabilní nulu

nebo PID regulátor s přenosem $F_R(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_I p} + \frac{T_D p}{t p + 1} \right)$,

který do otevřeného regulačního obvodu zavede jeden stabilní pól, jeden nulový pól a dvě stabilní nuly.

I když se může zdát nelogické zkoumat průběh GMK pro záporné hodnoty K (což odpovídá regulačnímu obvodu s kladnou zpětnou vazbou), některé úlohy návrhu regulátorů mohou vést i k takovému řešení, a proto se budeme zabývat i touto variantou GMK.

Rovnice GMK a základní pravidla pro jeho konstrukci ($K \leq 0$):

Rovnice GMK (4.34) má v tomto případě tvar

$$1 - K \frac{b_o(p)}{a_o(p)} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{b_o(p)}{a_o(p)} = \frac{1}{K} \quad (4.38)$$

Po rozdělení na absolutní hodnotu a fázi dostáváme oproti (4.36) pouze **změnu fázové podmínky**

$$\arg \left\{ \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \right\} = \arg \{b_o(p)\} - \arg \{a_o(p)\} = 0, \quad (4.39)$$

zatímco **podmínka pro absolutní hodnotu přenosu zůstává nezměněna**: $\left| \frac{b_o(p)}{a_o(p)} \right| = \frac{1}{K}$ (4.40)

Pro konstrukci GMK musíme tedy upravit jen ta pravidla, kterých se týká změna fázové podmínky:

Pravidlo 2/ $(n - m)$ asymptot GMK svírá s reálnou osou úhly a_l

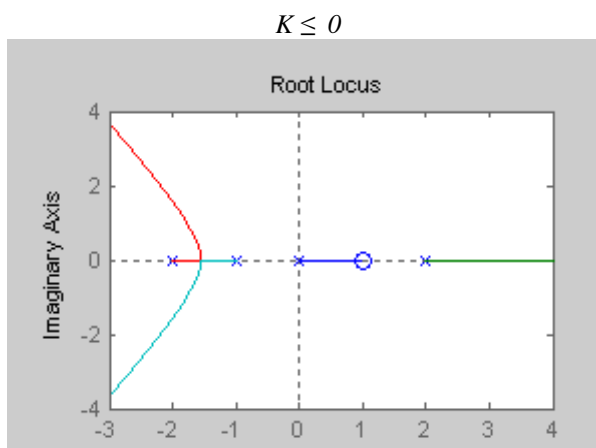
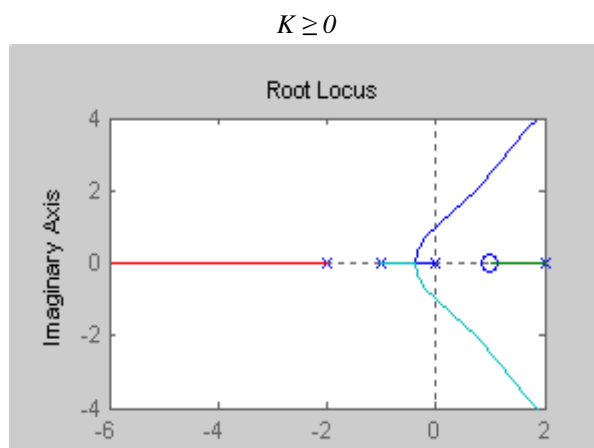
$$a_l = \frac{(l-1)2p}{n-m}, \quad l = 1, 2, \dots, n-m$$

Pravidlo 4/ GMK probíhá po reálné ose VLEVO od **SUDÉHO** počtu nul a pólů

Ostatní pravidla se nemění

Příklad 4.9.: Je dán přenos otevřeného regulačního obvodu $F_o(p) = K \frac{p-1}{p(p+1)(p+2)(p-2)}$

Zakreslete GMK pro $K \geq 0$ a $K \leq 0$!



5. DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

Dosud jsme se zabývali spojitými lineárními dynamickými systémy (LDS), tj. systémy spojitými v čase i v úrovni. Předpokládali jsme, že budou řízeny nějakým spojitým regulátorem, tj. systémem, jehož vstupem i výstupem jsou funkce spojité v čase. Regulační obvod měl tak všechny části popsané spojitými modely LDS a všechny veličiny byly spojité v čase.

5.1. Regulační obvod při diskrétním řízení spojitých LDS

Při řízení spojitých LDS číslicovým počítačem je situace komplikovanější, neboť číslicový počítač s implementovaným diskrétním algoritmem řízení je propojen se spojitým řízeným systémem přes A/D a D/A převodníky.

A/D převodník na vstupu počítače - považujeme jej za *ideální vzorkovač*, který převádí spojitý výstup $y(t)$ a referenční signál $w(t)$ s konstantní periodou vzorkování T_{vz} na funkce diskrétní v čase $y(kT_{vz})$, $w(kT_{vz})$, definované pouze v diskrétních časových okamžicích $t = kT_{vz}$, $k = 0, 1, \dots$

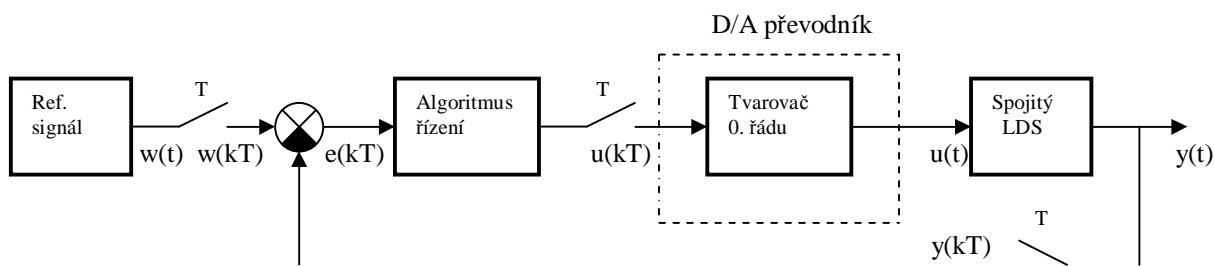
D/A převodník na výstupu počítače - má za úkol převádět vypočtené diskrétní hodnoty řízení $u(kT_f)$ s konstantní periodou řízení T_f na spojitý řídicí signál $u(t)$. Vycházíme-li z funkce obvykle používaného D/A převodníku, který každou vypočtenou hodnotu řízení přidržuje konstantní po dobu periody řízení T_f , modelujeme D/A převodník jako *ideální vzorkovač v sériovém spojení s t.zv. tvarovačem nultého řádu*, jehož výstupem je spojitá, po částech konstantní funkce $u(t)$. Protože tvarovač reaguje na posloupnost řídicích pulsů, jeho funkce je reprezentována integrátorem, který se vynuluje po uplynutí periody řízení. Lze jej tedy popsat spojitým přenosem

$$F_{TV}(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-pT_f}). \quad (5.1)$$

Po částech konstantní řízení $u(t)$ je následně přiváděno na vstup spojitého řízeného systému, popsaného spojitým přenosem $F_S(p)$. V této souvislosti se nabízí otázka, není-li po částech konstantní řízení $u(t)$ pouze hrubou aproximací spojitého řízení které bychom získali, kdybychom stejný systém řídili spojitým regulátorem? Nemáme se snažit o přesnější rekonstrukci spojitého řízení $u(t)$ z diskrétních hodnot řízení $u(kT_f)$ ve smyslu Shannonovy věty o rekonstrukci spojitého signálu z jeho diskrétních hodnot? Z hlediska diskrétního řízení systému je však důležitý pouze účinek řídicí veličiny na systém a je tedy vhodné *modelovat řízený systém jako součin přenosu tvarovače nultého řádu a přenosu řízeného systému*, což automaticky bere do úvahy neideální rekonstrukci spojitého řízení.

Poznamenejme ještě, že činnost A/D převodníku i D/A převodníku je řízena hodinovými pulsy, které budeme v dalším považovat za synchronní a budeme uvažovat i rovnost periody vzorkování T_{vz} a periody řízení T_f , pod společným označením $T = T_{vz} = T_f$.

Regulační obvod při diskrétním řízení spojitých LDS je uveden na následujícím schéma: (z důvodu jednoduchosti a přehlednosti je odhlédnuto od skutečné hardwareové realizace)



Spojité referenční signál je označen $w(t)$, spojitý vstup řízeného systému $u(t)$ a spojitý výstup $y(t)$. Vzorkováním referenčního signálu resp. výstupu A/D převodníkem dostáváme funkce diskrétní v čase $w(kT)$ resp. $y(kT)$ a po jejich odečtení diskrétní regulační odchylku $e(kT)$. Diskrétní algoritmus řízení může být zastoupen diskrétním přenosem regulátoru $F_R(z)$, který budeme později definovat pomocí Z-transformace poměrem Z-obrazů diskrétní funkce $u(kT)$ a $e(kT)$ při nulových počátečních podmínkách.

Funkci tvarovače jsme již vysvětlili a jeho spojitý přenos je dán vztahem (5.1).

V regulačním obvodu se tudíž vyskytují jak členy pracující ve spojitém čase, tak i členy pracující v diskrétním čase a analýza diskrétních regulačních obvodů i návrh diskrétního algoritmu řízení si budou vyžadovat použití nějakého konzistentního matematického popisu pro oba typy těchto členů. Zavádí se proto Laplaceova transformace i pro funkce diskrétní v čase - **Z-transformace**.

Existují dva principiálně odlišné přístupy k návrhu diskrétního algoritmu řízení (prozatím uvažujeme model vnějšího popisu):

1/ Vytvoříme **diskrétní model** $F_S(z)$ pro sériové spojení přenosů řízeného spojitého LDS a tvarovače 0. řádu dané součinem $F_S(p)F_{TV}(p)$ a provedeme **přímý návrh diskrétního regulátoru** $F_R(z)$.

Návrh regulátoru ovšem předpokládá použití nějaké návrhové metody, která by měla být podložena **teorií diskrétního řízení LDS**.

2/ Vyjdeme ze znalosti **spojitého modelu** $F_S(p)$ řízeného LDS a **navrhujeme spojitý regulátor** $F_R(p)$ s použitím nějaké návrhové metody podloženou **teorií spojitého řízení LDS**.

Následně provedeme **diskretizaci navrženého spojitého regulátoru** $F_R(p) \xrightarrow{\text{diskr}} F_R(z)$.

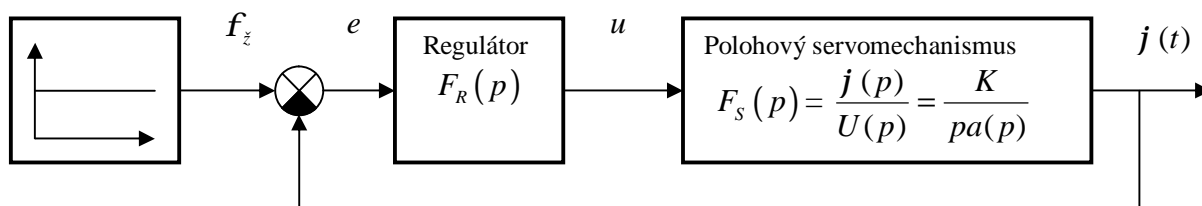
(V tomto přístupu, na rozdíl od předchozího, funkce tvarovače nemusí být apriorně brána do úvahy, přestože ji v regulačním obvodu vykonává).

Intuice nám říká, že diskrétní systém se bude chovat jako spojitý systém při dostatečně malé periodě vzorkování T a přirozeně si můžeme klást otázku, zda má vůbec smysl vytvářet nějakou teorii diskrétního řízení LDS a proč při návrhu diskrétních regulátorů nepostupovat vždy podle druhého přístupu?

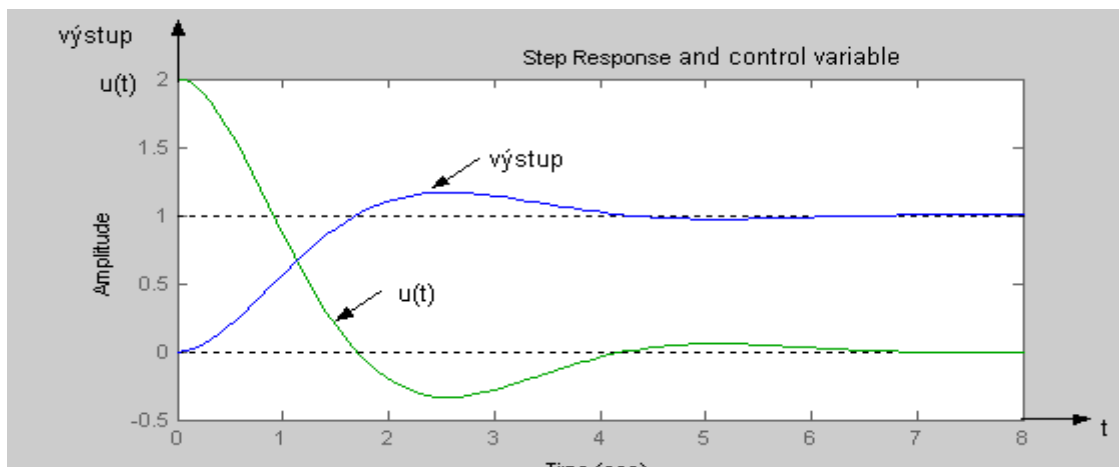
Na otázku odpovídá např. návrh **diskrétního regulátoru s konečným počtem kroků regulace** (*dead-beat control*), který nenachází paralelu u spojitých regulátorů s následnou diskretizací.

Jako formální ilustraci uvažujme spojitý a diskrétní řízení skokové odezvy polohového servomechanismu, reprezentované např. požadovaným úhlem natočení f_z hřídele stejnosměrného motoru řízeného do kotvy - viz *Příklad 2.5*.

Blokové schéma spojitého regulačního obvodu je na následujícím obrázku:



K danému systému s přenosem $F_S(p)$ byl navržen nějaký spojitý regulátor s přenosem $F_R(p)$. Typický průběh skokové odezvy výstupní veličiny $f(t)$ a průběh spojitěho řízení $u(t)$ v uzavřené regulační smyčce je znázorněn na následujícím obrázku:

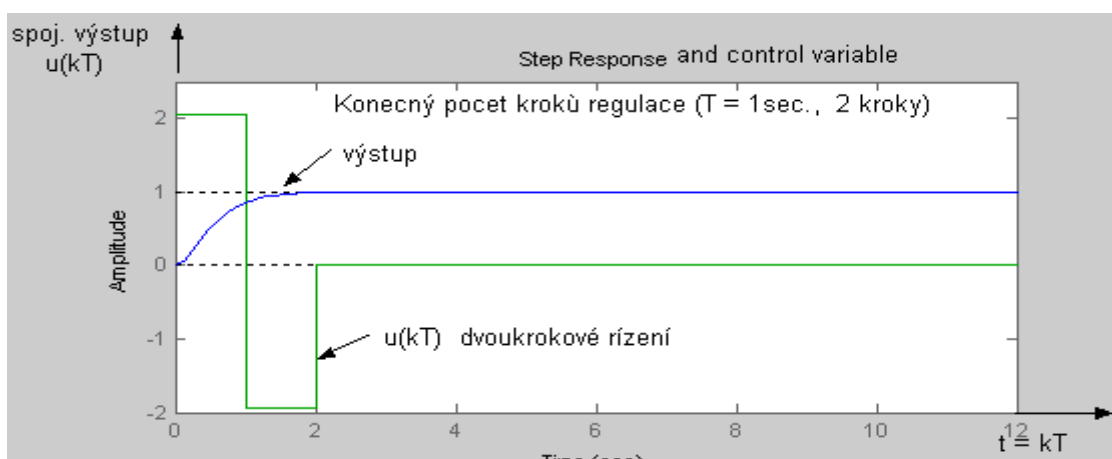


Budeme-li požadovat místo spojitěho (analogověho) regulátoru číslicový regulátor, můžeme postupovat přístupem **ad 2/** a diskretizovat navržený spojitý regulátor. Spojité řízení systému bude nahrazeno po částech konstantní funkcí a při dostatečně malé periodě řízení se spojitá odezva na výstupu nebude významněji lišit od odezvy zakreslené v grafu.

V obou případech však bude platit, že $f_z = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ resp. $f_z = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$!

V 9. kapitole, zabývající se klasickými metodami syntézy, ukážeme na návrhu diskrétního regulátoru s konečným počtem kroků regulace, že přístupem **ad 1/** může být požadovaná hodnota regulované veličiny dosažena za „minimální počet kroků regulace“. Protože perioda T je konstantní, jedná se vlastně o časově optimální řízení ...

Na následujícím obrázku jsou znázorněny průběhy diskrétního řízení $u(kT)$ a skokové odezvy výstupní polohy $j(t)$ spojitěho servomechanismu při dvou-krokové regulaci na požadovanou konstantní hodnotu $f_z = 1$:



Oproti předchozímu grafu vidíme, že při návrhu regulátoru s konečným počtem kroků regulace dosáhl spojitý regulovaný výstup polohového servosystému druhého řádu požadované ustálené hodnoty již za dvě periody řízení, tedy za dvě vteřiny a na požadované hodnotě již trvale zůstává. Řízení je po dvou periodách nulové.

Při diskrétním řízení spojitých systémů se setkáme s dalšími jevy v regulačním obvodu, které je nutno vzít v úvahu při návrhu diskrétních regulátorů:

a/ Časová závislost (t-variance)

Vyplývá ze skutečnosti, že vzorkování a řízení je taktováno hodinovými pulsy počítače, kdežto externí signál (referenční signál, porucha) může začít působit v libovolném časovém okamžiku t , $t \in [kT, (k+1)T]$, $k = 0, 1, \dots$. Odezvy na externí signály jsou tedy obecně časově posunuté vůči okamžikům vzorkování (řízení) a hodnoty vzorkovaných veličin jsou funkcí časového posunu. Tento efekt se zmenšuje s volbou kratší periody T .

b/ Aliasing

Tento efekt vzniká v důsledku nedodržení *vzorkovacího teorému*, který vyžaduje, aby vzorkovaný signál byl vzorkován s frekvencí w_{vz} , která musí být rovna alespoň dvojnásobku t.zv. *Nyquistovy frekvence* w_N , dané šířkou frekvenčního pásma vzorkovaného signálu.

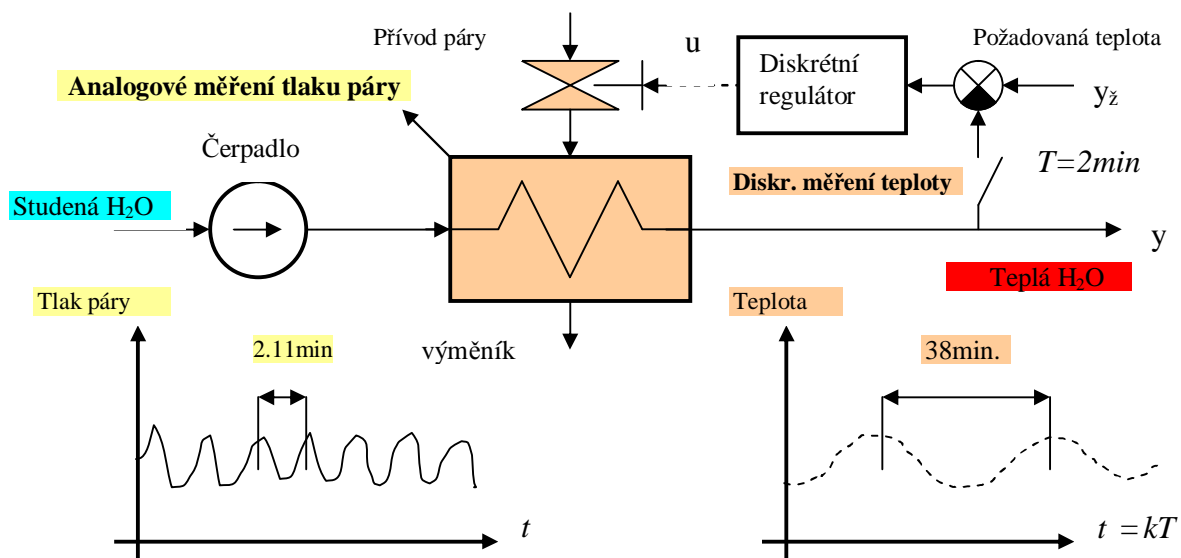
Jak ukážeme v odstavci 5.10., periodickým vzorkováním spojitého signálu $y(t)$ s frekvenčním spektrem $Y(jw)$, $Y(jw)$ je Fourierův obraz $y(t)$, vznikne vzorkovaný signál $y^*(t)$ jako diskrétní posloupnost $\{y(kT)\}$. Frekvenční spektrum vzorkovaného signálu $Y^*(jw)$ však bude ještě obsahovat vedlejší spektra posunutá o násobky vzorkovací frekvence $k w_{vz}$:

$$Y^*(jw) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(jw + jkw_{vz}) \quad (5.2)$$

Není-li dodržena podmínka $w_{vz} \geq 2 w_N$, potom dojde k překrytí spekter, ve vzorkovaném signálu není již možné separovat příspěvky od jednotlivých frekvencí a vznikají jakési zdánlivé (aliasing) frekvence, které systém vlastně negeneruje. Představíme-li si, že diskrétní regulátor bude odvozovat řízení z těchto zdánlivých průběhů vzorkovaných veličin, je nutné vzniku aliasingu zabránit výběrem vhodné periody vzorkování a odfiltrováním vyšších harmonických ještě před vzorkováním (návrh anti-aliasingového spojitého filtru – nízkofrekvenční propust se zlomovou frekvencí menší než $w_{vz}/2$).

Uvedeme praktický příklad: Do výměníku je přiváděna přes regulační ventil horká pára a ohřívá protékající vodu. Tlak páry ve výměníku se měří analogově a teplota ohříváné vody diskrétně se zvolenou periodou vzorkování $T = 2$ min. Teplota vody je udržována na požadované hodnotě diskrétním regulátorem, který řídí otevření ventilu v závislosti na odměřené teplotní odchylce od požadované hodnoty. Regulace probíhá uspokojivě až do okamžiku, kdy se kuželka v opotřebovaném ventilu trochu uvolní, rozkmitá a způsobí oscilace v přiváděném množství páry, a tedy i oscilace v tlaku páry a v teplotě vody, protože tlak páry a teplota vody jsou fyzikálně vázané veličiny a měly by oscilovat se stejnou frekvencí.

Situace je znázorněna na následujícím obrázku spolu se záznamy měření tlaku a teploty:



Ze záznamu diskrétního měření teploty, usuzujeme na periodu oscilací teploty asi 38 minut, avšak z analogového měření tlaku zjišťujeme periodu oscilací 2.11 minut.

Nevhodnou volbou periody vzorkování teploty $T = 2$ min. vznikl *aliasing*...

Přesvědčíme se o tom výpočtem frekvence vzorkování w_{vz} a frekvence oscilací tlaku páry w_o :

$$w_{vz} = \frac{2p}{2} = 3.142 \text{ rad / min} , \quad w_o = \frac{2p}{2.11} = 2.978 \text{ rad / min} .$$

Vzorkovací frekvence nesplňuje požadavek dvojnásobku frekvence spojitěho signálu (oscilace tlaku), spojitý signál je reprezentován frekvencí větší nežli je Nyquistova frekvence ($w_N = w_{vz} / 2$). Ve vzorkovaném signálu dochází k periodickému překrývání frekvenčních spekter v okolí násobků vzorkovací frekvence ($w = kw_{vz} \pm w_o$) a nejnižší aliasing frekvence je $w_{al} = w_{vz} - w_o = 0.1638 \text{ rad / min}$, což odpovídá odměřené (aliasingové) periodě oscilací teploty $T_{al} = 2p / w_{al} = 38 \text{ min}$. Oscilace teploty jsou fiktivní, avšak regulátor podle nich řídí přívod páry a regulace teploty je nefunkční!

Ještě jeden příklad:

Požadujeme-li , aby ve vzorkovaném řečovém signálu byly zastoupeny frekvence řekněme do 11 kHz , musí být spojitý řečový signál vzorkován se vzorkovací frekvencí alespoň 22 kHz a navíc je nutné zařadit do kanálu spojitěho signálu dolní frekvenční propust se zlomovou frekvencí nižší než 11 kHz , jinak vznikne *aliasing*.

5.2. Funkce diskrétní v čase

Funkce diskrétní v čase vzniknou:

a/ dosazením diskrétního času do spojitých funkcí ($t = kT$)

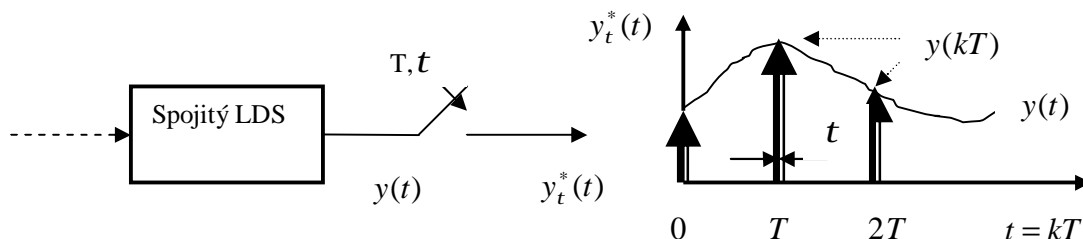
$$x(t) = e^{-at} \quad \rightarrow \quad x(kT) = e^{-akT} , \quad k = 0, 1, \dots$$

b/ aproximací integrace či derivace u spojitě pracujících členů v regulačním obvodu

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(t) dt \quad \rightarrow \quad y(kT) = \frac{1}{T_I} \sum_{m=0}^{k-1} Tu(mT)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T_I} u(t) \quad \rightarrow \quad \frac{y[(k+1)T] - y(kT)}{T} = \frac{1}{T_I} u(kT)$$

c/ vzorkováním spojitých veličin



Spojitá veličina $y(t)$ je vzorkována s konstantní periodou vzorkování T a po dobu sepnutí je vzorkovanou veličinou $y_t^*(t)$ sledován průběh spojitě veličiny $y(t)$. Tento skutečný průběh vzorkované veličiny bude matematicky obtížně popsatelný, a proto se uchýlíme k jeho aproximaci obdélníkovými pulsy s dobou trvání t :

$$y_t^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) [1(t - kT) - 1(t - kT - t)] , \quad 1[t] \dots \text{jednotkový skok}$$

V L -obrazech :

$$L\{y_t^*(t)\} = Y_t^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \left[\frac{1e^{-pkT}}{p} - \frac{1e^{-pkT}e^{-pt}}{p} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \left[(1 - e^{-pt}) \frac{e^{-pkT}}{p} \right]$$

Rozvineme $1 - e^{-pt}$ v řadu a pro aproximaci využijeme skutečnost, že $t \ll T$:

$$1 - e^{-pt} = 1 - \left(1 - pt + \frac{p^2 t^2}{2!} - \frac{p^3 t^3}{3!} + \dots \right) \cong pt$$

Po dosazení do předchozího vztahu dostáváme

$$Y_t^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \left[pt \frac{e^{-pkT}}{p} \right] = t \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) e^{-pkT}$$

a po zpětné transformaci do časové oblasti

$$y_t^*(t) \cong t \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) d(t - kT) = t y^*(t)$$

Získali jsme vztah mezi průběhem $y_t^*(t)$ a idealizovaným popisem $y^*(t)$ vzorkované spojité veličiny. Aproximovaný popis lze interpretovat jako *amplitudovou modulaci d - pulsů (Diracových pulsů)*, násobených dobou sepnutí t (ta nebude hrát roli v přenosech!).

Vzorkováním veličiny v regulačním obvodu tedy získáváme posloupnost diskretních hodnot $\{y(kT)\}$, $k = 0, 1, \dots$, kterou můžeme popsat funkcí diskretní v čase $y^*(t)$

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) d(t - kT) = y(0)d(t) + y(T)d(t - T) + y(2T)d(t - 2T) + \dots \quad (5.3)$$

Tuto idealizovanou funkci budeme používat za následujících předpokladů:

- a/ $t \ll T$, T je zvolená perioda vzorkování
- b/ v regulačním obvodu je tvarovač, který přidržuje hodnoty vzorkované veličiny na konstantní hodnotě $\forall t$, $kT \leq t < (k+1)T$, $k = 0, 1, \dots$ (je kompenzováno t)
- c/ určíme diskretní přenos (je kompenzováno t)

Příklad 5.1. :

Vzorkujte s periodou $T = 0.5$ sec. impulsní funkci systému, jehož přenos je $F(p) = 4/(p+2)$!

Řešení:

Impulsní funkce: $g(t) = 4 e^{-2t}$. Hodnoty $g(t)$ v diskretních časových okamžicích $t = 0, T, 2T, \dots$ tvoří diskretní posloupnost $\{g(kT) = \{4, 1.47, 0.54, \dots\}$.

Impulsní funkce jako funkce diskretní v čase má tvar: $g^*(t) = 4d(t) + 1.47d(t - T) + 0.54d(t - 2T) + \dots$

5.3. Laplaceova transformace funkcí diskretních v čase. Z – transformace.

Aplikujme Laplaceovu transformaci na funkci diskretní v čase $f^*(t)$

$$\begin{aligned} L\{f^*(t)\} &= F^*(p) = L\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) d(t - kT) \right\} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) d(t - kT) e^{-pt} \Big|_{t=kT} dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(0) d(t) dt + \int_0^{\infty} f(T) d(t - T) e^{-pT} dt + \int_0^{\infty} f(2T) d(t - 2T) e^{-p2T} dt + \dots = \\ &= f(0) + f(T) e^{-pT} + f(2T) e^{-p2T} + \dots \Rightarrow \end{aligned}$$

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-pkT} \quad (5.4)$$

Zavedením komplexní proměnné $z = e^{pT}$ (ve frekvenční oblasti $z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$) definujeme Z-transformaci, převádějící funkce diskrétní v čase na funkce komplexní proměnné z :

$$Z\{f(kT)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \quad (5.5)$$

Podobně jako u spojitých systémů je $F(z)$ racionální polynomiální funkce (polynomiální zlomek).

Pro určení časového originálu $f(kT)$ z daného obrazu $F(z)$ použijeme zpětnou Z-transformaci, která je rovněž analogií zpětné L -transformace pro spojitě veličiny.

Zpětná Z -transformace je dána vztahem

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1} dz = \sum_{i=1}^n r_i z_i^{k-1} \quad (5.6)$$

Výpočet časového originálu z daného obrazu:

- 1/ **Rozkladem $F(z)$ na parciální zlomky a určením residuí r_i** , příslušejících singulárním bodům (pólům) z_i funkce $F(z)$, $i = 1, \dots, n$. Rozklad na parciální zlomky a výpočet residuí se provádí stejným způsobem jako u spojitých systémů.
- 2/ **Použitím tabulek převodních vztahů**
- 3/ **Přímým dělením** polynomu čitatele polynomiálního zlomku jeho jmenovatelem.
V případě soudělnosti polynomů dostaneme po vydělení polynom konečného stupně, a tedy konečnou posloupnost diskrétní proměnné.
V případě nesoudělnosti polynomů dostaneme nekonečnou posloupnost diskrétní proměnné - *nezískáme však časový originál v uzavřeném tvaru jako při použití (5.6).*

Základní vlastnosti Z-transformace

1/ Linearita

$$Z\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 Z\{f_1(t)\} + a_2 Z\{f_2(t)\} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$$

2/ Časové posunutí (dopředné)

$$Z\{f(t + nT)\} = z^n \left[F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{-m} \right], \quad f(mT) \dots \text{počáteční podmínky}$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } Z\{f[(k+n)T]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f[(k+n)T]z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} f[(k+n)T]z^{-(k+n)} = z^n \sum_{m=n}^{\infty} f(mT)z^{-m} = \\ &= z^n \left[\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{-m} \right] \end{aligned}$$

$$Z\{f(t + nT)\} = z^n F(z), \quad \text{při nulových počátečních podmínkách}$$

3/ Časové posunutí (zpětné)

$$Z\{f(t - nT)\} = z^{-n} F(z)$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } Z\{f[(k-n)T]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f[(k-n)T]z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f[(k-n)T]z^{-(k-n)} = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} f(mT)z^{-m} = \\ &= z^{-n} F(z), \quad \text{protože } f(mT) = 0 \text{ pro } m < 0. \end{aligned}$$

4/ Věta o počáteční hodnotě

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$\text{Důkaz: } \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} [f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots] = f(0)$$

5/ Věta o konečné hodnotě (pokud konečná hodnota existuje)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz: } \Delta f_k &= f[(k+1)T] - f(kT) \Rightarrow Z\{\Delta f_k\} = (z-1)F(z) - zf(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f_k z^{-k} \\ &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) \end{aligned}$$

Poznámka:

Protože při diskrétním řízení předpokládáme předem zvolenou konstantní periodu vzorkování (řízení) T , obvykle ji při popisu diskrétních veličin vynecháváme a místo o diskrétních časech kT hovoříme o "krocích k ".

Příklady použití Z-transformace:

1/ **Jednotkový skok:** $f(kT) = 1 \quad \forall k, k \geq 0$

$$Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

2/ **Jednotkový impuls:** $f(kT) = 1$ pro $k = 0$, $f(kT) = 0$ pro $k \neq 0$

$$Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = 1$$

3/ **Exponenciální funkce:** $f(kT) = e^{-akT}$

$$Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

4/ **Mocnina konstanty:** c^k , $c = \text{konst.}$:

$$Z\{c^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} c^k z^{-k} = 1 + cz^{-1} + c^2 z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - cz^{-1}} = \frac{z}{z - c}$$

Diferenční rovnice – diskrétní přenos:

K dané diferenční rovnici popisující chování diskrétního LDS určíme diskrétní přenos:

$$\text{Diferenční rovnice: } y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = u(k)$$

$$\text{Po Z-transformaci: } z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - 5zY(z) + 5zy(0) + 6Y(z) = U(z)$$

$$\text{Při nulových počátečních podmínkách: } (z^2 - 5z + 6)Y(z) = U(z)$$

$$\text{Diskrétní přenos: } F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

Výpočet diskrétní přechodové funkce

Uvažujme diskrétní přenos $F(z)$ z předchozího příkladu a vypočteme odezvu na

jednotkový skok. Obraz jednotkového skoku je $U(z) = \frac{z}{z-1}$.

a/ Rozkladem na parciální zlomky:

$$Y(z) = F(z)U(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{r_1}{z-1} + \frac{r_2}{z-2} + \frac{r_3}{z-3} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{2}{z-2} + \frac{3/2}{z-3}$$

$$\text{Výpočet residuí: } r_i = \lim_{z \rightarrow z_i} [Y(z)(z - z_i)], \quad i = 1, 2, 3 \Rightarrow r_1 = 1/2, \quad r_2 = -2, \quad r_3 = 3/2$$

$$\text{Zpětnou } Z\text{-transformací: } y(k) = \sum_{i=1}^3 r_i z_i^{k-1} = \frac{1}{2} 1^{k-1} - 2 2^{k-1} + \frac{3}{2} 3^{k-1} = \frac{1}{2} - 2^k + \frac{1}{2} 3^k, \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

b/ Použitím tabulek:

V tabulkách nenalezneme $\frac{r_i}{z - z_i}$, ale obraz posunuté funkce $\frac{r_i z}{z - z_i}$.

$$\text{Určíme tedy } zY(z): \quad zY(z) = \frac{1/2z}{z-1} - \frac{2z}{z-2} + \frac{3/2z}{z-3} \quad (\text{obrazy odpovídají } Z\{c^k\}, \quad c = \text{konst.})$$

$$Z^{-1}\{zY(z)\} = y(k+1) = \frac{1}{2} - 2 \cdot 2^k + \frac{3}{2} 3^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ časový originál je ale posunutý o 1 krok!}$$

Posunem o 1 krok zpět dostáváme $y(k) = \frac{1}{2} - 2 \cdot 2^{k-1} + \frac{3}{2} 3^{k-1} = \frac{1}{2} - 2^k + \frac{1}{2} 3^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$ což je stejný výsledek jako v předešlém.

c/ Příným dělením polynomů:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{z}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} = 1z^{-2} + 6z^{-3} + 25z^{-4} + 90z^{-5} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

Příným dělením polynomů dostáváme nekonečnou mocninou řadu v inverzní proměnné z^{-1} , která odpovídá definici Z -transformace a její koeficienty jsou tudíž přímo hodnoty diskretní veličiny $y(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Nezískali jsme uzavřený tvar časového originálu $y(k)$ jako v předchozích případech, hodnoty jsou však stejné a přesvědčíme se o tom dosazením za příslušné časové okamžiky $k = 0, 1, 2, \dots$

5.4. Matematické modely pro vnější popis diskretních LDS

(diferenční rovnice, diskretní přenos, konvolutorní součet)

Některé dynamické systémy jsou již svojí povahou diskretní, pracují tedy pouze v diskretním čase (číslicový počítač, číslicový filtr apod.), není třeba provádět vzorkování a jsou přímo popsatelné nějakým diskretním matematickým modelem. Pokud však hledáme diskretní model pro dynamické systémy, jejichž veličiny jsou spojité v čase, musíme ještě odlišovat, zda do spojitého systému bude zahrnuta funkce D/A převodníku (např. při stanovení diskretního modelu spojitého, řízeného LDS s tvarovačem 0. řádu) nebo určujeme pouze diskretní model spojitě pracujícího členu, který je na vstupu a výstupu vzorkován. Ve formálním zápisu jsou tyto varianty již nerozlišitelné, a proto musíme výchozí situaci věnovat patřičnou pozornost.

Předpokládejme, že dynamické chování diskretně pracujícího systému lze popsat

lineární diferenční rovnicí n -tého řádu s konstantními koeficienty:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) = b_m u(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \dots + b_0u(k) \quad (5.7) \\ \text{přičemž } m \leq n, \quad y(0), y(1), \dots, y(n-1) \text{ jsou dané počáteční podmínky, } k = 0, 1, 2, \dots$$

Aplikací Z -transformace (při nulových počátečních podmínkách) dostáváme

$$(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0)Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_1z + b_0)U(z) \quad (5.8)$$

a analogicky jako u spojitých systémů definujeme *diskretní přenos* $F(z)$ jako poměr Z -obrazů diskretní výstupní funkce a diskretní vstupní funkce při nulových počátečních podmínkách:

$$F(z) = \frac{Z\{y(k)\}}{Z\{u(k)\}} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{b(z)}{a(z)}; \quad m \leq n \quad (5.9)$$

Kořeny polynomu $b(z)$ v čitateli jsou *nuly*, kořeny polynomu $a(z)$ ve jmenovateli jsou *póly*.

Diskrétní přenos lze také zapsat pomocí polynomů v inverzní proměnné z^{-1} formálním vydělením čitatele a jmenovatele nejvyšší mocninou z^n

$$F(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_m z^{-(n-m)} + b_{m-1} z^{-(n-m+1)} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n}} \quad (5.10)$$

Odpovídající diferenční rovnice má tvar

$$y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + \dots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n) \quad (5.11)$$

Statické zesílení K lze určit z diskrétního přenosu $F(z)$ použitím věty o konečné hodnotě

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) \quad (\text{u spojitých přenosů } K = \lim_{p \rightarrow 0} F(p)) \quad (5.12)$$

Diskrétní přenos členu s dopravním zpožděním t_d - celočíselným násobkem periody vzorkování :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-d}, \quad d = \frac{t_d}{T} \quad (5.13)$$

Konvolutorní součet je jedním z modelů vstupně-výstupního chování diskrétních LDS a je analogií konvolutorního integrálu u spojitých LDS:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(k-i)u(i) \quad \text{resp.} \quad y(k) = \sum_{i=0}^k g(i)u(k-i) \quad (5.14)$$

kde $g(k)$ je *diskrétní impulsní funkce* a $g(k-i)$ je *diskrétní váhová funkce*.

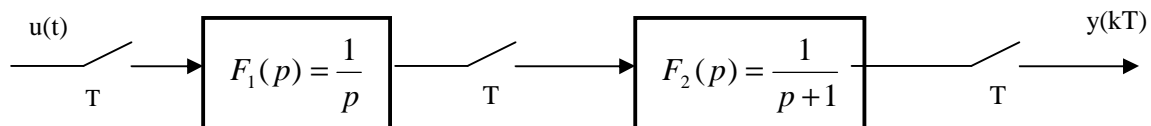
Několik poznámek:

1/ Pokud zapíšeme diferenční rovnici resp. rovnici (5.8) v operátorovém tvaru

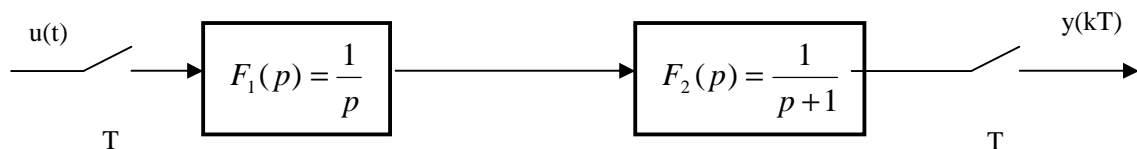
$$(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0) y(k) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0) u(k),$$

považujeme z za *operátor dopředného posunu*. Bývá označován q pro odlišení od z ve významu komplexní proměnné. Totéž platí i pro *operátor zpětného posunu* z^{-1} (q^{-1}).

2/ Při určování diskrétních přenosů v obvodech se spojitě pracujícími členy je nutné respektovat umístění vzorkovačů:



$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z\{F_1(p)\} Z\{F_2(p)\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-T})}$$



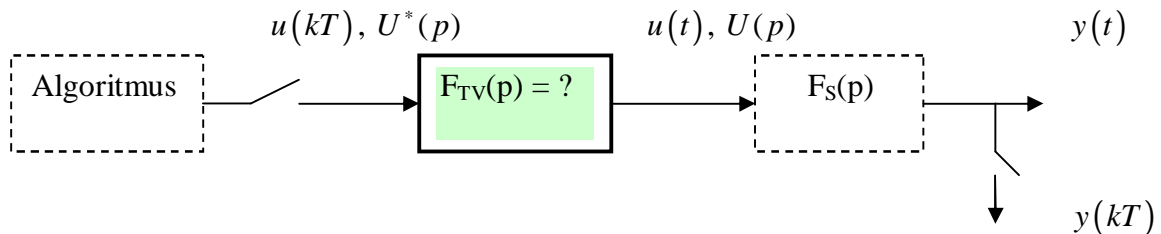
$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z\{F_1(p)F_2(p)\} = Z\left\{\frac{1}{p(p+1)}\right\} = Z\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right\} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

3/ Zkrácený zápis $F(z) = Z\{F(p)\} = Z\{L^{-1}\{F(p)\}|_{t=kT}\} = Z\{g(kT)\} \Rightarrow$ diskrétní přenos lze definovat také jako Z -transformaci diskrétní impulsní funkce jako u spojitéch přenosů.

Tvarovač 0. řádu

Jak již bylo řečeno v odstavci 5.1., při diskrétním řízení spojitéch LDS je žádoucí považovat za řízený systém sériové spojení přenosu tvarovače a přenosu spojitého, řízeného LDS.

Věnujme ještě pozornost odvození přenosu tvarovače 0. řádu:



Na vstupu tvarovače je diskrétní posloupnost řízení $u(kT)$, na výstupu dostáváme po částech konstantní řízení $u(t)$ t.zn., že $u(t) = u(kT) = \text{konst.}$ pro $kT \leq t < (k+1)T, \forall k, k = 0, 1, \dots$

Výstup tvarovače na k -tém intervalu $t \in [kT, (k+1)T)$ lze vyjádřit rozdílem dvou, o 1 periodu posunutých, jednotkových skoků, vynásobených konstantní hodnotou $u(kT)$:

$$u(t) = u(kT)\{1[t - kT] - 1[t - (k+1)T]\}$$

Výstup tvarovače na celém intervalu $t \in [0, \infty)$ je

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\{1[t - kT] - 1[t - (k+1)T]\}$$

a v Laplaceových obrazech

$$U(p) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \left[\frac{1}{p} e^{-pkT} - \frac{1}{p} e^{-p(k+1)T} \right] = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} \right) \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-pkT} = F_{TV}(p) U^*(p) \Rightarrow$$

$$\text{Spojitý přenos tvarovače 0. řádu: } F_{TV}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \quad (5.15)$$

$$\text{resp. } F_{TV}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega} e^{-j\omega T/2} = 2 \frac{\sin \omega T/2}{\omega} e^{-j\omega T/2} = |F_{TV}(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

Z frekvenčního přenosu tvarovače 0. řádu vidíme, že tvarovač zanáší do regulačního obvodu fázové zpoždění úměrné polovině periody vzorkování.

Diskrétní přenos spojitého LDS s tvarovačem 0. řádu

Pro přímý návrh diskrétního regulátoru považujeme za řízený systém součin přenosu tvarovače $F_{TV}(p)$ a přenosu $F_S(p)$ spojitého LDS.

Diskrétní přenos řízeného systému $F_S(z)$ je dán Z -transformací součinu spojitých přenosů:

$$F_S(z) = Z\{L^{-1}\{F_{TV}(p)F_S(p)\}\} = Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-pT}}{p} F_S(p)\right\}|_{t=kT}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{F_S(p)}{p}\right\}|_{t=kT}\right\} = \\ = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{F_S(p)}{p}\right\}|_{t=kT}\right\} \quad (5.16)$$

Diskrétní přenos $F_S(z)$ lze také interpretovat jako Z-obraz *diskrétní impulsní funkce* $g(kT)$:

$$F_S(z) = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} F_S(p) \right\} \right\} = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{F_S(p)}{p} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{F_S(p)}{p} e^{-pT} \right\} \right\} = \\ = Z \{ h(kT) - h[(k-1)T] \} = Z \{ g(kT) \},$$

kde $h(kT)$ je *diskrétní přechodová funkce* a platí $\Delta h(kT) = h(kT) - [h(k-1)T] = g(kT)$.

Příklad 5.2. :

Spojité LDS je popsán přenosem $F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p+1}$. Určete jeho diskrétní přenos $F_S(z)$

a/ bez tvarovače 0. řádu **b/** s tvarovačem 0. řádu .

S použitím vět o počáteční a konečné hodnotě porovnejte počátky a ustálené hodnoty diskrétních přechodových charakteristik. Periodu vzorkování zvolte $T=1\text{sec}$.

Řešení:

a/ $F(z) = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \right\} \Big|_{t=kT} \right\} = Z \{ e^{-kT} \} = \frac{z}{z-0.368} = \frac{1}{1-0.368z^{-1}}$

$$\lim_{k \rightarrow 0} h(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z-0.368} \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1-0.368z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-0.368} \frac{z}{z-1} = 1.58$$

b/ $F(z) = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{1}{p+1} \right\} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right\} \Big|_{t=kT} \right\} \\ = \frac{0.632}{z-0.368} = \frac{0.632z^{-1}}{1-0.368z^{-1}}$

$$\lim_{k \rightarrow 0} h(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.632}{z-0.368} \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.632z^{-1}}{1-0.368z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.632}{z-0.368} \frac{z}{z-1} = 1$$

V konfrontaci s přechodovou charakteristikou spojitého systému vidíme, že limitní hodnoty splňuje pouze diskrétní model spojitého systému s tvarovačem 0. řádu.

5.5. Diskrétní stavový model spojitého LDS s tvarovačem 0. řádu

Uvažujme spojitý řízený LDS se stavovým popisem

S: $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t_0)$ dáno, $\mathbf{x}(t) \in R^n$ (5.17)

$y(t) = C\mathbf{x}(t)$

a určíme pro danou periodu vzorkování (řízení) T jeho diskrétní stavový model, respektující funkci tvarovače 0. řádu.

Diskrétní stavový model S_D předpokládáme ve tvaru

S_D: $\mathbf{x}(k+1) = F(T)\mathbf{x}(k) + G(T)\mathbf{u}(k)$ $k = 0,1,2,\dots$ (5.18)

$y(k) = C\mathbf{x}(k)$

kde $F(T), G(T)$ jsou hledané matice s parametry závislými na periodě T .

Pro odvození diskretního modelu použijeme explicitní řešení stavové rovnice spojitého systému:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t)}Bu(t)dt \quad (5.19)$$

Dosadíme-li za t_0 resp. t diskretní časové okamžiky kT resp. $(k+1)T$ a budeme-li respektovat funkci tvarovače podmínkou $u(t) = u(kT) = konst.$ pro $kT \leq t < (k+1)T$, $k = 0, 1, 2, \dots$ dostaneme

$$x[(k+1)T] = e^{A[(k+1)T-kT]}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-t]}Bdt u(kT)$$

$$x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT) - A^{-1}[e^{A[(k+1)T-t]}B]_{kT}^{(k+1)T} u(kT) = e^{AT}x(kT) + A^{-1}(e^{AT} - I)Bu(kT) \quad (5.20)$$

Porovnáním s (5.18) dostáváme hledanou souvislost matic spojitého a diskretního modelu:

$$F(T) = e^{AT}, \quad G(T) = A^{-1}(e^{AT} - I)B, \quad (C \text{ je beze změny}) \quad (5.21)$$

Není-li matice A invertovatelná (např. systémy s astatismem), lze matici G určit pomocí rozvoje e^{AT} v řadu

$$G = A^{-1} \left[I + \frac{AT}{1!} + \frac{A^2T^2}{2!} + \dots - I \right] B = T \left[I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2T^2}{3!} + \dots \right] B \quad (5.22)$$

Uvedme ještě přehled diskretních modelů spojitého systému s tvarovačem 0. řádu a jejich vzájemné souvislosti.

Spojitý model		Diskretní model	
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$	$\rightarrow F = e^{AT}, G = A^{-1}(F - I)B$	$\rightarrow x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$	
$y(t) = Cx(t)$	$\leftarrow A = \frac{1}{T} \ln F, B = (F - I)^{-1}AG$	$\leftarrow y(k) = Cx(k)$	
	(Matlab: c2d, d2c)		
$F_S(p) = C(pI - A)^{-1}B$	$\rightarrow F_S(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{F_S(p)}{p} \right\}$	$\rightarrow F_S(z) = C(zI - F)^{-1}G$	

Několik poznámek:

Diskretní stavový model vzniklý diskretizací spojitého systému s tvarovačem je formálně nerozlišitelný od stavového modelu systému, který je diskretní sám o sobě.

Postup při převodu diskretního přenosu do normálních forem stavových reprezentací je shodný s postupem známým z převodu spojitého přenosu.

Diskretní přenosy spojitého systému s tvarovačem 0. řádu použijeme pro přímý návrh diskretního regulátoru.

Pokud navrhujeme nejprve spojitý regulátor, potom následnou diskretizací jeho spojitého přenosu můžeme provést podle následujícího odstavce.

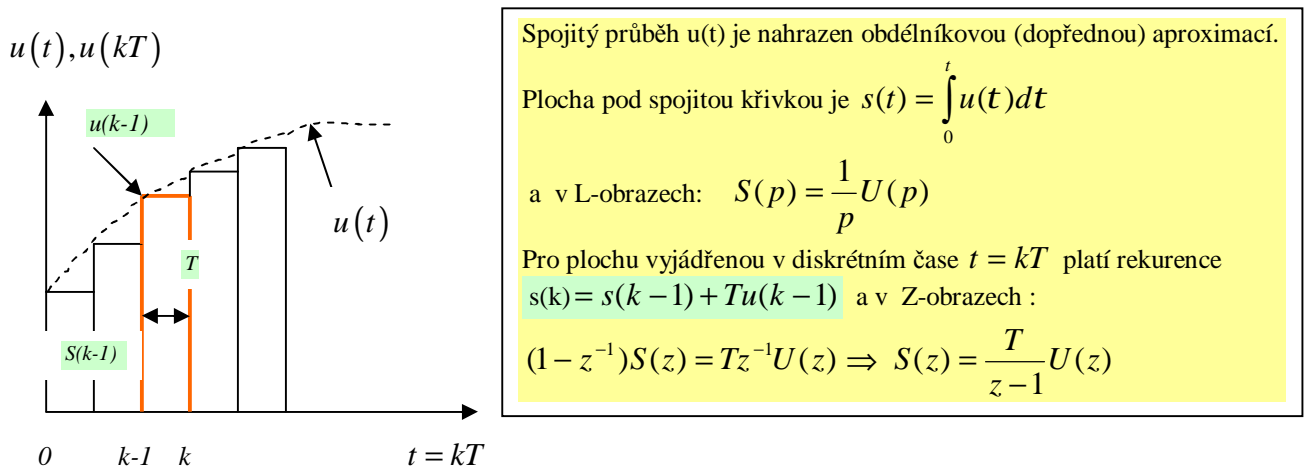
5.6. Diskretizace spojitéch přenosů na základě aproximace integrálu nebo derivace.

Zabývejme se nyní metodami diskretizace, které vycházejí z aproximace integrálu či derivace spojitéch veličin a které používáme zejména při diskretizaci spojitého přenosu regulátoru.

Diskretizace spojitéch přenosů není tak průhledná záležitost, jak by se mohlo na první pohled zdát. Diskretizací stabilního spojitého přenosu může vzniknout nestabilní diskrétní přenos, diskretizací minimálně-fázového spojitého přenosu může vzniknout neminimálně-fázový diskrétní přenos. Jako logický argument zní, že ideální diskretizace by měla využít definičního vztahu mezi komplexními proměnnými z a p , tedy $z = e^{pT}$ resp. $p = \frac{1}{T} \ln z$. Chceme-li však

určit $F(z)$ jako $F(p)$ do kterého je dosazeno $p = \frac{1}{T} \ln z$, dostaneme nepoužitelné polynomy v proměnné $\ln z$. Definiční vztah však můžeme použít pro exaktní převod pólů či nul spojitého přenosu $z_i = e^{p_i T}$, $i=1,2,\dots$, je však nutné upravit zesílení přenosu a otázkou je, jak transformovat nevlastní nuly přenosu (přenos s relativním řádem $n-m$ má $n-m$ nevlastních nul v nekonečnu - viz GMK). Problém řešíme doplněním čitatele diskrétního přenosu o diskrétní nuly s hodnotou -1 nebo 0 , tedy násobením čitatele diskrétního přenosu členem $(z+1)^{n-m}$ nebo z^{n-m} .

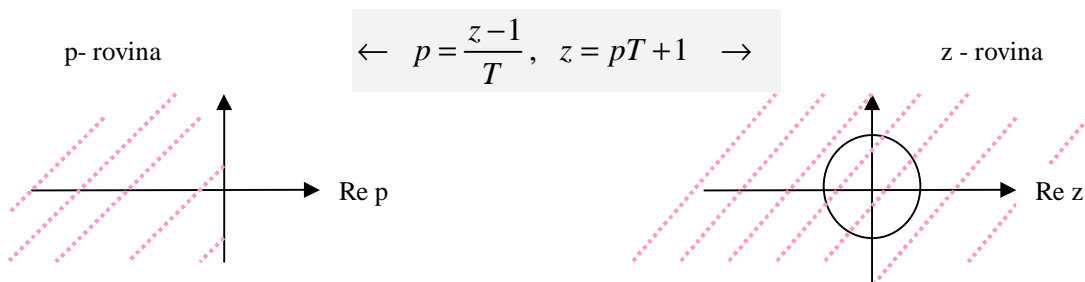
1/ Obdélníková (dopředná) aproximace:



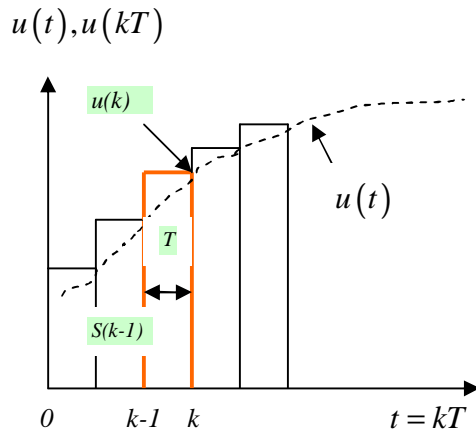
Porovnáním obrazů ploch $S(p)$ a $S(z)$ dostáváme vztah $p = \frac{z-1}{T}$.

Diskretizovaný přenos $F(z)$ získáme ze spojitého přenosu $F(p)$ při dosazení $p = \frac{z-1}{T}$

Použitím obdélníkové dopředné aproximace však můžeme ze stabilního spojitého $F(p)$ obdržet nestabilní $F(z)$, neboť uvedený vztah převádí póly p_i ze stabilní levé poloroviny komplexní roviny p do celé komplexní roviny z , přičemž stabilní oblast je vymezena podmínkou $|z| < 1$ (vnitřek jednotkové kružnice – viz stabilita diskrétních systémů v odst. 5.9.).



2/ Obdélníková (zpětná) aproximace:



Spojitéjší průběh $u(t)$ je nahrazen obdélníkovou (zpětnou) aproximací.

Plocha pod spojitou křivkou je $s(t) = \int_0^t u(t) dt$

a v L-obrazech: $S(p) = \frac{1}{p} U(p)$

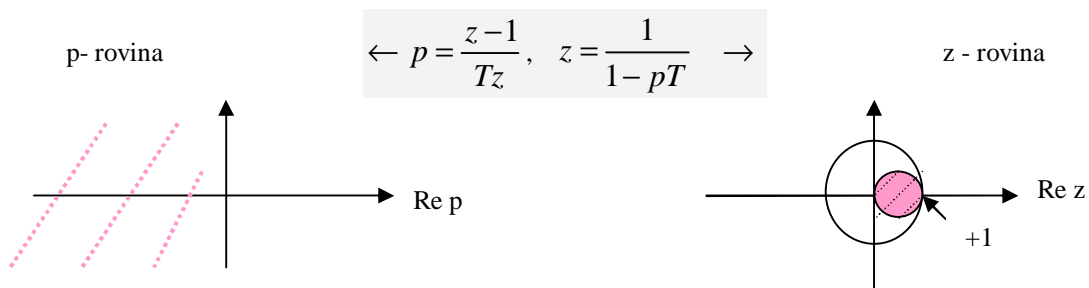
Pro plochu vyjádřenou v diskrétním čase $t = kT$ platí rekurence $s(k) = s(k-1) + Tu(k)$ a v Z-obrazech :

$$(1 - z^{-1})S(z) = TU(z) \Rightarrow S(z) = \frac{Tz}{z-1} U(z)$$

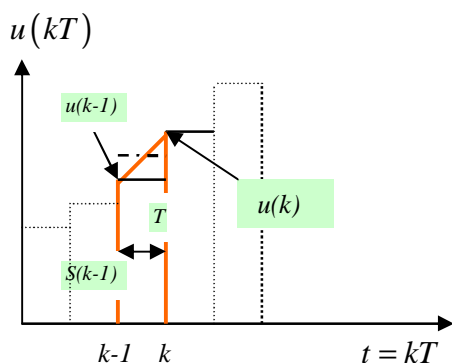
Porovnáním obrazů ploch $S(p)$ a $S(z)$ dostáváme vztah $p = \frac{z-1}{Tz}$.

Diskretizovaný přenos $F(z)$ získáme ze spojitého přenosu $F(p)$ při dosazení $p = \frac{z-1}{Tz}$

Ze stabilního spojitého $F(p)$ nelze obdržet nestabilní $F(z)$, neboť dochází k zobrazení stabilní poloroviny dovnitř kružnice o poloměru $r = 1/2$ a se středem v bodě $Q = (1/2, j0)$.



3/ Lichoběžníková (Tustinova) aproximace:



Spojitéjší průběh $u(t)$ je nahrazen lichoběžníkovou aproximací. Plocha pod

spojitou křivkou je $s(t) = \int_0^t u(t) dt$, resp. $S(p) = \frac{1}{p} U(p)$

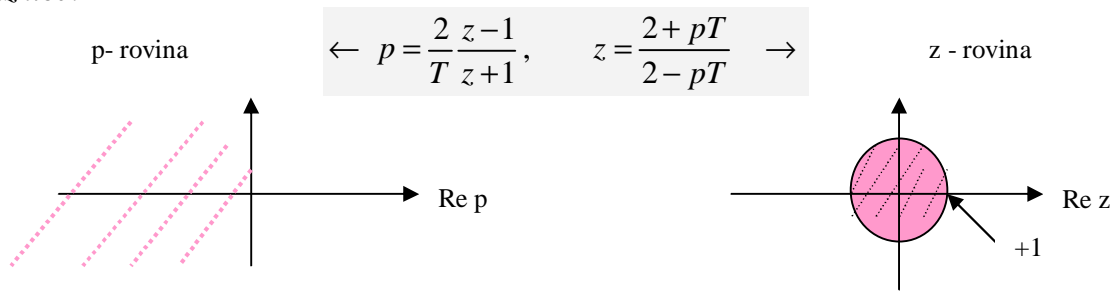
Pro plochu vyjádřenou v diskrétním čase $t = kT$ platí rekurence $s(k) = s(k-1) + T/2[u(k-1) + u(k)]$ a v Z-obrazech :

$$(1 - z^{-1})S(z) = (T/2)(1 + z^{-1})U(z) \Rightarrow S(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} U(z)$$

Porovnáním obrazů ploch $S(p)$ a $S(z)$ dostáváme vztah $p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$. (Matlab: c2d, 'Tustin')

Diskretizovaný přenos $F(z)$ získáme ze spojitého přenosu $F(p)$ při dosazení $p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

V tomto případě dochází k žádoucímu zobrazení stabilní poloroviny dovnitř jednotkové kružnice:

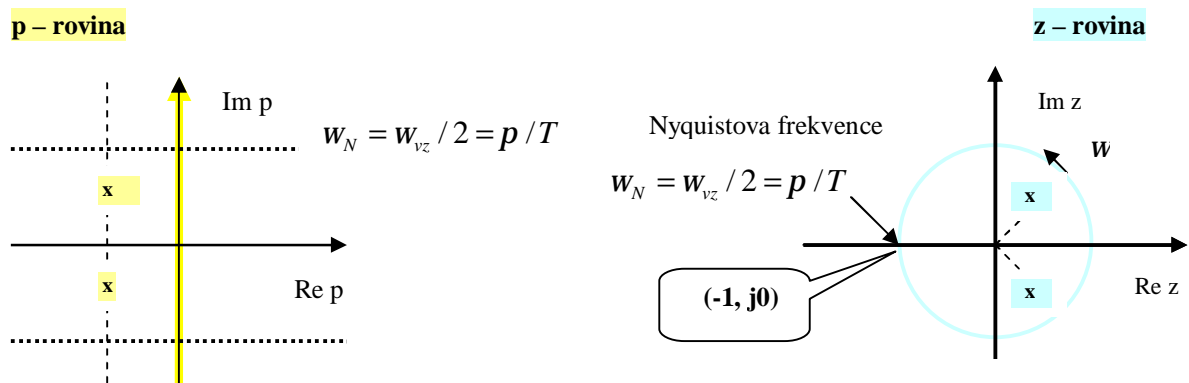


5.7. Transformační vztah $z = e^{pT}$, souvislost p-roviny a z-roviny

V předchozím odstavci jsme uvedli, že transformační vztah $z = e^{pT}$, kde $T = \frac{2p}{w_{vz}}$ a w_{vz} je frekvence vzorkování v rad/sec., je exaktním vztahem pro transformaci pólů spojitého systému na póly diskrétního systému.

Jako dostatečně ilustrativní příklad uvažujme nějaký stabilní, komplexně sdružený pól spojitého systému, který označíme $p_{1,2} = -s \pm jw$. Po transformaci dostaneme odpovídající komplexně sdružený pól diskrétního systému v polárním tvaru

$$p_{1,2} = -s \pm jw \rightarrow z_{1,2} = e^{(-s \pm jw)T} = e^{-\frac{2ps}{w_{vz}}} e^{\pm j\frac{2pw}{w_{vz}}} = |z| e^{\pm jf} \quad (5.23)$$



Mezi $|z|$ a s je transformace jednoznačná, ale pro úhel natočení platí

$$e^{\pm j\frac{2pw}{w_{vz}}} = e^{\pm j\frac{2p(w+kw_{vz})}{w_{vz}}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.24)$$

\Rightarrow nekonečná množina dvojic komplexně sdružených pólů $\{p_{1,2}\} = -s \pm jw \pm jkw_{vz}$ se zobrazí na jedinou dvojici $z_{1,2}$!

Uvažujme případ, kdy $s = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm jw$ (dvojice ryze imaginárních pólů, systém by generoval netlumený harmonický signál $\forall w$).

Sledujeme-li rozložení pólů diskrétního systému v závislosti na w , vidíme, že se póly nachází v z -rovině na jednotkové kružnici:

$$z_{1,2} = 1e^{\pm j\frac{2pw}{w_{vz}}} \quad (5.25)$$

Má tudíž smysl uvažovat pouze frekvence z intervalu $w \in [0, w_{vz}/2]$, kde $w_{vz}/2$ je **Nyquistova frekvence** w_N , $w_N = w_{vz}/2 = p/T$, daná šířkou frekvenčního pásma vzorkovaného signálu.

Rozložení pólů při $w = w_{vz}/2$: $z_{1,2} = 1 \cdot e^{\pm j\pi}$ (oba póly v -1).

5.8. Stavový model diskretních LDS , řešení stavové rovnice, základní odezvy

V odstavci 5.5. jsme odvodili diskretní stavový model spojitému systému s tvarovačem 0. řádu a také jsme uvedli, že je formálně nerozlišitelný od stavového modelu systému, který je sám o sobě diskretní. V dalším zahrneme oba možné případy do formálního stavového popisu s běžně používaným označením matic $S(A,B,C,D)$. Podobně jako u spojitéch LDS vyjdeme ze stavového modelu diskretního LDS, určíme explicitní řešení stavové a výstupní rovnice a uvedeme některé potřebné vztahy pro další analýzu.

$$\begin{aligned} S: x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) ; & x(0) \text{ je poč. stav, } & x \in R^n, u \in R^r, y \in R^p \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) & k = 0,1,2,\dots & I_i(A) \dots \text{ vlastní čísla matice } A, i=1,\dots,n \end{aligned} \quad (5.26)$$

Po dosazení za diskretní časové okamžiky $k = 0,1,\dots$ dostaneme

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

¶

Explicitní řešení stavové rovnice v k-tém kroku lze zapsat ve tvaru:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j) \quad \text{a po rozepsání součtového členu}$$

$$x(k) = A^k x(0) + \begin{bmatrix} B, AB, \dots, A^{k-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \mathbf{M} \\ u(0) \end{bmatrix} = A^k x(0) + Q_{\tilde{R}} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \mathbf{M} \\ u(0) \end{bmatrix},$$

$$\text{kde } Q_{\tilde{R}} = \begin{bmatrix} B, AB, \dots, A^{k-1} B \end{bmatrix} \text{ je matice říditelnosti } n \times nr \text{ a } A^k \text{ je matice přechodu.} \quad (5.27)$$

Explicitní řešení výstupní rovnice:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(j) + Du(k) \quad (5.28)$$

Řešení stavové rovnice v Z-obrazech

Z-transformací (5.26) dostaneme: $zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$

$$(zI - A)X(z) = zx(0) + BU(z)$$

$$X(z) = z(zI - A)^{-1} x(0) + (zI - A)^{-1} BU(z) \quad (5.29)$$

Z porovnání (5.27) a (5.29) vyplývá, že matici přechodu A^k lze určit ze vztahu

$$A^k = Z^{-1} \{ z(zI - A)^{-1} \}$$

Řešení výstupní rovnice v Z-obrazech

Po dosazení řešení stavové rovnice v Z-obrazech (5.29) do výstupní rovnice v Z-obrazech dostáváme

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) = Cz(zI - A)^{-1} x(0) + C(zI - A)^{-1} BU(z) + DU(z) \quad (5.30)$$

Diskretní přenos

Diskretní přenos je definován jako poměr Z-obrazů výstupní a vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách a vyplývá bezprostředně z (5.30)

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1} B + D = \frac{C(zI - A)^{Adj} B}{\det(zI - A)} + D \quad (5.31)$$

Diskrétní impulsní funkce $g(k)$

Je odezva výstupu systému $y(k)$ na jednotkový impuls na vstupu systému, určíme ji ze vztahu (5.28) za podmínky, že $x(0) = 0$, $u(0) = 1$ a $u(k) = 0$ pro $k > 0$:

$$\begin{aligned} g(k) &= 0 && \text{pro } k < 0 \\ g(k) &= D && \text{pro } k = 0 \\ g(k) &= CA^{k-1}B && \text{pro } k > 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Konvolutorní součet – odezva na libovolný vstupní signál

$$y(k) = \sum_{j=0}^k g(k-j)u(j) \quad \text{nebo} \quad y(k) = \sum_{j=0}^k g(j)u(k-j) \quad (5.33)$$

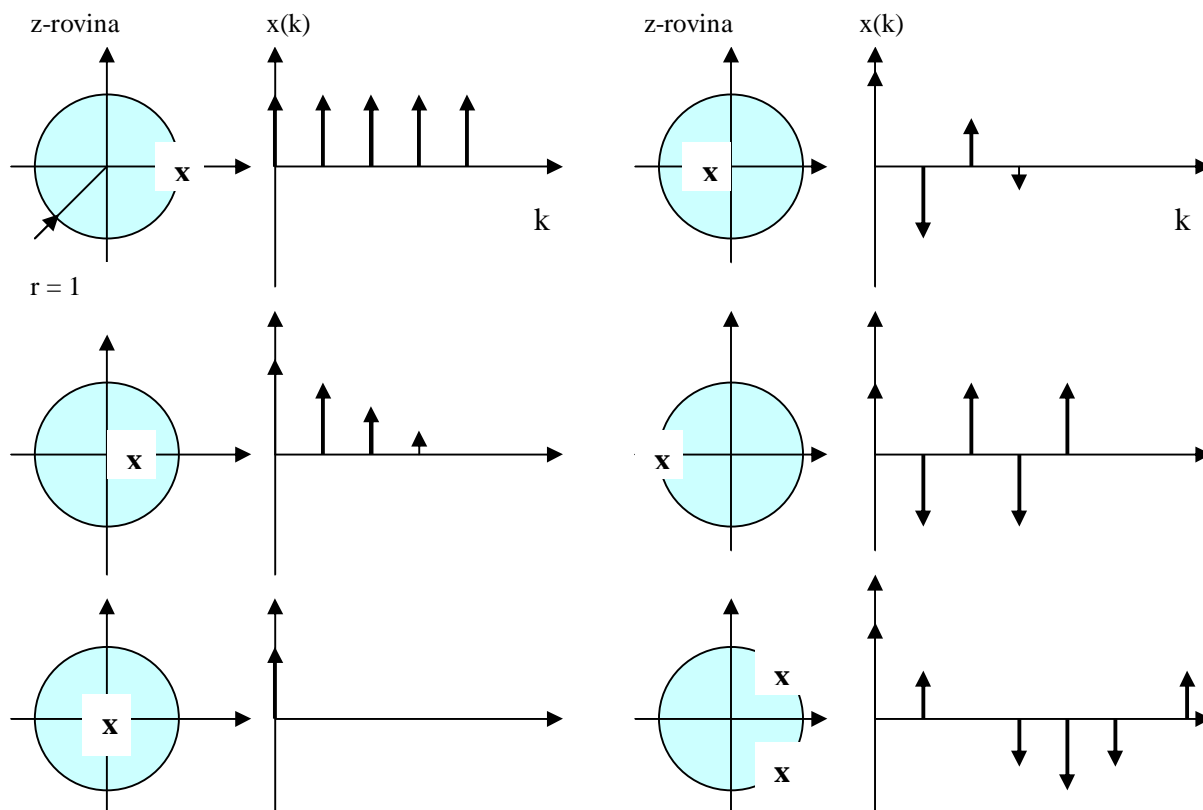
Diskrétní přechodová funkce $h(k)$

Je odezva výstupu systému $y(k)$ na jednotkový skok na vstupu systému, určíme ji ze vztahu (5.31) za podmínky, že $x(0) = 0$, $u(k) = 1, \forall k, k \geq 0$ nebo použitím konvolutorního součtu

$$h(k) = \sum_{j=0}^k g(k-j) \cdot 1, \quad g(k-j) \text{ je váhová (impulsní) funkce určená vztahem (5.32)}. \quad (5.34)$$

Souvislost odezvy s umístěním pólů diskrétního LDS

Na následujících grafech jsou na jednoduchých příkladech ilustrovány kvalitativní průběhy stavové odezvy diskrétního LDS (nenulové počáteční podmínky, nulový vstup) pro různé varianty umístění pólů z_i , resp. vlastních čísel $I_i(A)$. Exaktní průběh odezvy je dán řešením $x(k) = A^k x(0)$ rovnice (5.27), resp. použitím její modální verze $\bar{x}(k) = \Lambda^k \bar{x}(0)$:



Pokud budou póly ležet vně jednotkové kružnice, odpovídající odezvy budou nestabilní.

5.9. Vlastnosti diskretních LDS

Řiditelnost a dosažitelnost diskretních LDS

Při analýze vlastností spojitého LDS jsme si položili dvě základní otázky:

1/ Za jakých podmínek je možné řídit systém z daného počátečního stavu do jiného stavu?

2/ Za jakých podmínek lze určit stav systému pozorováním jeho výstupu a vstupu?

Tytéž otázky si položíme i u diskretních LDS.

Uvažujme stavový model (5.26) diskretního LDS n -tého řádu s r vstupy a p výstupy.

Explicitní řešení (5.27) stavové rovnice v k -tém kroku má tvar

$$x(k) = A^k x(0) + \begin{bmatrix} B, AB, \dots, A^{k-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \mathbf{M} \\ u(0) \end{bmatrix} = A^k x(0) + Q_R \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \mathbf{M} \\ u(0) \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

kde $Q_R = [B, AB, \dots, A^{k-1} B]$ je **matice řiditelnosti** o rozměru $n \times kr$.

Jestliže matice Q_R má hodnost n , $n = \dim x$ pro nějaké k , $k \leq n$, potom je možné nalézt n rovnic, ze kterých lze určit konečnou posloupnost řízení, převádějící počáteční stav $x(0)$ do požadovaného stavu $x(k)$ v konečném čase, reprezentovaném k kroky řízení.

Poznamenejme, že pro systém s více vstupy není řešení jednoznačné.

Budeme-li uvažovat systém s jedním vstupem a jedním výstupem (matice B je sloupcová), potom matice Q_R má rozměr $n \times k$ a může mít hodnost n nejdříve při $k = n$.

U jednorozměrových systémů je minimální počet kroků řízení pro převedení počátečního stavu $x(0)$ do požadovaného stavu $x(k)$ dán dimenzí vektoru stavu n ($k = n = \dim x$).

Definice (Řiditelnost)

Diskretní LDS je řiditelný, jestliže existuje taková sekvence řízení, která převede libovolný počáteční stav do počátku stavového prostoru v konečném čase.

Definice (Dosažitelnost)

Diskretní LDS je dosažitelný, jestliže existuje taková sekvence řízení, že libovolný stav je dosažitelný z libovolného počátečního stavu v konečném čase.

Řiditelnost neimplikuje dosažitelnost, což je zřejmé z (5.34). Jestliže $A^k x(0) = 0$, potom počátek stavového prostoru je řiditelný nulovým vstupem, ale systém nemusí být dosažitelný. Pro invertovatelnou matici dynamiky A oba pojmy splývají a není nutné je odlišovat. To je právě případ diskretních modelů spojitého systému s tvarovačem, kde matice dynamiky $F(T) = e^{AT}$ je vždy invertovatelná.

Věta 5-1

Diskretní LDS je dosažitelný tehdy a jen tehdy když hodnost matice Q_R je rovna dimenzi vektoru stavu (pro řiditelnost požadujeme navíc invertovatelnost A).

Pozorovatelnost diskretních LDS

Definice (Pozorovatelnost)

Diskretní LDS je pozorovatelný, jestliže existuje konečné k takové, že znalost sekvence řízení $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$ a výstupu $y(0), y(1), \dots, y(k-1)$ je postačující pro určení počátečního stavu $x(0)$.

Uvažujme opět stavový model (5.26) diskrétního LDS n -tého řádu s r vstupy a p výstupy a explicitní řešení výstupní rovnice (5.31). Účinek známého vstupního signálu lze vždy určit, a proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat nulový vstup. Z výstupní rovnice dostáváme

$$\begin{aligned}
 y(0) &= Cx(0) \\
 y(1) &= Cx(1) = CAx(0) \\
 \mathbf{M} \quad & \text{maticově :} \quad \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \mathbf{M} \\ y(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \mathbf{M} \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} x(0) = Q_p x(0), \quad (5.35) \\
 y(k-1) &= CA^{k-1}x(0)
 \end{aligned}$$

kde Q_p je *matice pozorovatelnosti* o rozměru $kp \times n$.

Jestliže matice Q_p má hodnost n , $n = \dim x$ pro nějaké k , $k \leq n$, potom je možné nalézt n rovnic, ze kterých lze určit počáteční stav $x(0)$ v konečném čase, reprezentovaném k kroky pozorování výstupu. Opět platí, že pro systém s více vstupy řešení není jednoznačné.

Budeme-li uvažovat systém s jedním vstupem a jedním výstupem (matice C je řádková), potom matice Q_p má rozměr $k \times n$ a může mít hodnost n nejdříve při $k = n$.

U jednorozměrových systémů je minimální počet kroků pozorování výstupu, pro určení počátečního stavu $x(0)$, dán dimenzí vektoru stavu n ($k = n = \dim x$).

Věta 5-2

Diskrétní LDS je pozorovatelný tehdy a jen tehdy, když hodnost matice Q_p je rovna dimenzi vektoru stavu.

Duální systém.

Je definován stejně jako u spojitéch systémů a za duální považujeme i vlastnost říditelnosti a pozorovatelnosti. Je-li nějaký systém říditelný, je duální systém pozorovatelný a naopak. Všimněme si, že dualita je patrná i z tvaru matic říditelnosti a pozorovatelnosti.

STABILITA DISKRÉTNÍCH LDS

Analogicky jako u spojitéch systémů, vnitřní stabilitou rozumíme stabilitu rovnovážného stavu autonomního (neřízeného) systému).

Věta 5-3

Autonomní (neřízený) diskrétní LDS

S: $x(k+1) = Ax(k)$, $x(0)$... poč. stav, $x \in R^n$, $I_i(A)$... vlastní čísla A , $i = 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots$

je asymptoticky stabilní tehdy a jen tehdy, když všechna vlastní čísla $I_i(A)$ resp. kořeny z_i , charakteristického polynomu

$$a(z) = \det(zI - A) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

leží uvnitř jednotkové kružnice v komplexní rovině z:

$$|z_i| < 1; \quad \forall i, \quad i = 1, \dots, n$$

Důkaz:

a/ Z transformace $z = e^{pT}$, $p = -s + jw$ přímo vyplývá, že stabilní polorovina komplexní roviny p se transformuje dovnitř jednotkové kružnice v komplexní rovině z .

b/ Explicitní řešení stavové rovnice autonomního systému je $x(k) = A^k x(0)$.

Je-li čtvercová matice A převedena na diagonální tvar s vlastními čísly na diagonále \Rightarrow

$x_i(k) = I_i^k x_i(0)$, $i = 1, \dots, n$ a systém je asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow |I_i(A)| = |z_i| < 1 \quad \forall i$.

c/ Přirozená složka odezvy asymptoticky stabilního LDS musí konvergovat k nule pro libovolný vstupní signál.

Uvažujme např. odezvu na jednotkový skok u diskrétního LDS n -tého řádu, popsaného přenosem $F(z)$. Polynomiální zlomek obrazu odezvy $Y(z)$ rozložíme na parciální zlomky

$$Y(z) = F(z)U(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{r_i}{z - z_i}; \quad U(z) = \frac{z}{z-1} \text{ a po zpětné transformaci zapíšeme celkovou}$$

odezvu jako součet přirozené a vynucené složky odezvy:

$$y(k) = y_n(k) + y_f(k) = \sum_{i=1}^n r_i z_i^{k-1} + y_f(k).$$

Z uvedeného opět plyne, že diskrétní LDS bude asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow |z_i| < 1$

$\forall i, i = 1, \dots, n.$

Vnější stabilita (BIBO stabilita)

Definice (BIBO stabilita):

Diskrétní LDS je BIBO stabilní, jestliže $\forall u \ \forall k: |u(k)| \leq M_u \ \exists M_y: |y(k)| \leq M_y.$

Věta 5-4:

Diskrétní LDS je BIBO stabilní $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty$, kde $g(k)$ je diskrétní impulsní funkce.

ANALÝZA STABILITY DISKRÉTNÍCH LDS, KRITERIA STABILITY

Podobně jako u spojitych systémů nás zajímají možnosti jak obejít výpočet vlastních čísel matice dynamiky, resp. výpočet kořenů charakteristického polynomu.

1/ Hurwitzovo algebraické kritérium

Hurwitzovo kritérium lze použít i pro diskrétní LDS, pokud použijeme v charakteristické rovnici

$$a(z) = \det(zI - A) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

bilinéární transformaci, definovanou vztahy

$$p = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{1+p}{1-p}, \quad (5.36)$$

Tato bilinéární transformace (je to v podstatě lichoběžníková aproximace, zachovávající stabilní oblast v p -rovině a z -rovině) převede charakteristickou rovnici $a(z) = 0$ na $a(p) = 0$.

2/ Juryho algebraické kritérium

Je založené na redukci charakteristického polynomu $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ podle následující tabulky:

a_n	a_{n-1}	a_1	a_0	koeficienty v 1. řádce sepíšeme do 2. řádky v obráceném pořadí
a_0	a_1	a_{n-1}	a_n	koeficienty v 2. řádce násobíme podílem a_0 / a_n a odečteme od 1. řádky

$^{n-1}a_n$	$^{n-1}a_{n-1}$	$^{n-1}a_1$	0	koeficienty v 1. řádce sepíšeme do 2. řádky v obráceném pořadí
$^{n-1}a_1$	$^{n-1}a_{n-1}$	$^{n-1}a_n$	0	koeficienty v 2. řádce násobíme podílem a_1^{n-1} / a_n^{n-1} a odečteme od 1. řádky

stejný postup v každém bloku					

0a_n					v poslední řádce je jediný prvek

Jestliže $a_n > 0$, potom kořeny charakteristického polynomu leží uvnitř jednotkové kružnice tehdy a jen tehdy, když všechny koeficienty $a_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Není-li žádný z těchto koeficientů nulový, počet záporných koeficientů udává počet nestabilních pólů.

3/ Kriterium využívající stopu matice dynamiky

Z lineární algebry je známo, že stopa matice je rovna součtu jejích vlastních čísel

$stA = \sum_{i=1}^n I_i(A)$ a můžeme také psát $|stA| = \left| \sum_{i=1}^n I_i(A) \right|$. Protože diskretní LDS je asymptoticky

stabilní $\Leftrightarrow |I_i(A)| < 1, \forall i, i = 1, \dots, n$, musí platit $\sum_{i=1}^n |I_i(A)| < n \Rightarrow$

Diskretní LDS je asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow |st(A^N)| < n$, pro každé přirozené N
(zavedení N zabrání vyhodnocení nestabilního systému jako stabilního systému)

4/ Ljapunovova teorie stability

Použití Ljapunovovy metody pro analýzu stability spojitých i diskretních LDS ukážeme v poslední 11. kapitole, zabývající se nelineárními dynamickými systémy.

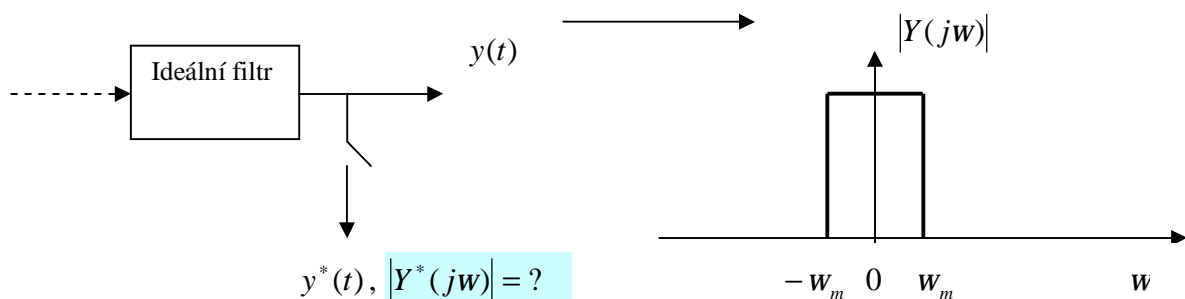
5.10. Vzorkování spojitého signálu a Shannonova věta o rekonstrukci signálu

V odstavci 5.1. jsme bez podrobnějšího zdůvodnění uvedli, že vzorkováním spojitého signálu $y(t)$ s frekvenčním spektrem $Y(j\omega)$, vznikne vzorkovaný signál $y^*(t)$, jehož frekvenční spektrum $Y^*(j\omega)$ obsahuje vedle základního spektra ještě vedlejší spektra, posunutá o násobky vzorkovací frekvence $k\omega_v$:

$$Y^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(j\omega + jk\omega_v) \quad (5.37)$$

Vzorkovací frekvence by měla být volena tak, aby nedocházelo ke ztrátě informace ve vzorkovaném signálu, k překrývání spekter vedoucího k aliasingu a aby bylo teoreticky možné rekonstruovat původní spojitý signál z diskretních hodnot.

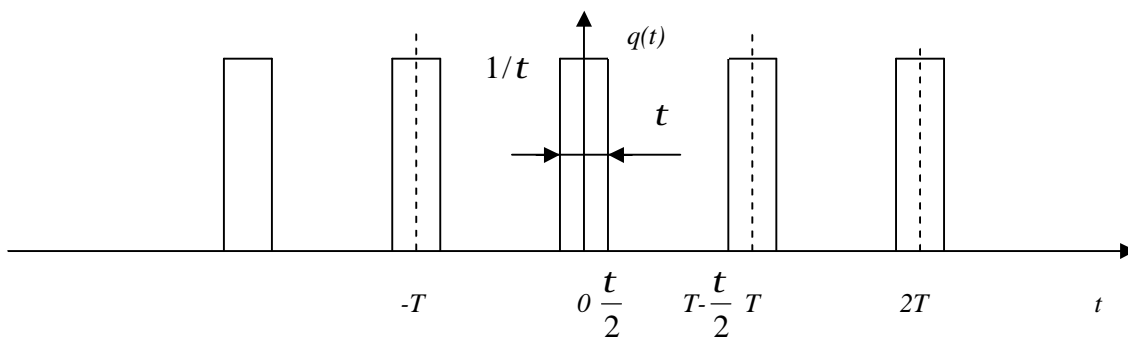
Uvažujme pro jednoduchost vzorkování výstupního signálu $y(t)$ ideálního filtru dle obr.:



Vzorkování spojitého signálu opět matematicky vyjádříme jako amplitudovou modulaci d – pulsů

$$y^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} y(kT)d(t-kT) = y(t) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} d(t-kT) \quad (5.38)$$

a posloupnost Diracových pulsů budeme aproximovat posloupností q – pulsů o šířce t a výšce $1/t$, která pro $t \rightarrow 0$ limituje k posloupnosti d – pulsů:



Funkce $\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} d(t - kT)$ je periodická, sudá - rozvineme ji ve Fourierovu řadu:

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} d(t - kT) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kw_{vz}t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kw_{vz}t \quad (5.39)$$

≡ 0... pro sudou funkci

kde
$$b_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{T} \left(\int_0^{t/2} \frac{1}{t} dt + \int_{T-t/2}^T \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{T}$$

a
$$b_k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{T} \int_0^T q(t) \cos kw_{vz}t dt = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{2}{T} \int_0^{t/2} \frac{1}{t} \cos kw_{vz}t dt = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 \sin kw_{vz}t}{T t k w_{vz}} \Big|_0^{t/2} = \frac{2}{T}$$

Po dosazení do (5.39) za b_0, b_k dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} d(t - kT) &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kw_{vz}t = \\ &= \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos kw_{vz}t \right) = \frac{1}{T} \left(1 + e^{jw_{vz}t} + e^{-jw_{vz}t} + e^{j2w_{vz}t} + e^{-j2w_{vz}t} + \dots \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jkw_{vz}t} \end{aligned}$$

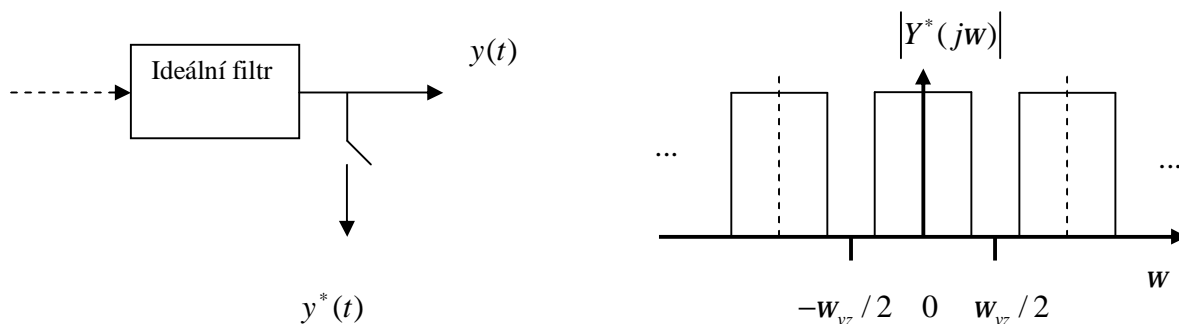
Vzorkovaný spojitý signál (5.38) lze tedy zapsat ve tvaru:

$$y^*(t) = y(t) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} d(t - kT) = y(t) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jkw_{vz}t} \quad (\text{operace vzorkování má zesílení } 1/T!) \quad (5.40)$$

Frekvenční spektrum vzorkovaného signálu získáme z Fourierova obrazu $Y^*(jw) = F\{y^*(t)\}$:

$$Y^*(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) e^{-jw t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j(w + kw_{vz})t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(jw + jkw_{vz}) \quad (5.41)$$

Následující obrázek ilustruje žádoucí případ volby frekvence vzorkování w_{vz} , kdy nedojde k překrývání spekter (a vzniku aliasingu), neboť $w_{vz} > 2w_m$



Věta 5-5 (Shannonova věta o rekonstrukci signálu):

Platí-li pro Fourierův obraz $Y(j\omega)$ spojitého signálu $y(t)$, že $|Y(j\omega)| = 0$ pro $|\omega| \geq \omega_m$ (ideální filtr), potom průběh $y(t)$ je jednoznačně určen diskrétními hodnotami $\{y(kT)\}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ jestliže pro vzorkovací frekvenci $\omega_{vz} = \frac{2p}{T}$ bude platit $\omega_{vz} > 2\omega_m$ resp. $T < \frac{p}{\omega_m}$.

Připomeňme, že Nyquistova frekvence ω_N byla definována jako polovina vzorkovací frekvence $\omega_N = \frac{\omega_{vz}}{2} = \frac{p}{T}$ a ztotožňujeme ji s maximální frekvencí (ω_m), která má být obsažena ve vzorkovaném signálu.

Spojitý signál $y(t)$ lze rekonstruovat z diskrétních hodnot $y^*(t) = \{y(kT)\}$, pokud je přivedeme na vstup ideálního filtru s frekvenčním přenosem $F(j\omega) = T$ na intervalu $-\frac{p}{T} \leq \omega \leq \frac{p}{T}$,

(připomeňme, že operace vzorkování měla zesílení $1/T$).

Impulsní funkce $g(t)$ ideálního filtru je dána zpětným Fourierovým obrazem jeho frekvenčního přenosu $F(j\omega)$

$$g(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\frac{p}{T}}^{\frac{p}{T}} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2pjt} \left(e^{j\frac{p}{T}t} - e^{-j\frac{p}{T}t} \right) = \frac{T}{pt} \sin \frac{pt}{T} \quad (5.42)$$

Pro výpočet jeho spojitě výstupní odezvy $y(t)$ na vstupní signál $\{y(kT)\}$ použijeme konvolutorní součet

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT) y(kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T}{p(t - kT)} \sin \frac{p(t - kT)}{T} y(kT) \quad (5.43)$$

Z uvedeného vztahu je však zřejmé, že ideální rekonstrukce spojitého signálu by vyžadovala i znalost budoucích hodnot vzorkovaného signálu.

Při stanovení vhodné periody vzorkování T , bereme do úvahy maximální frekvence vyskytující se v regulačním obvodu, frekvenční pásmo působících poruch a požadovanou šířku pásma regulace.

Vzorkovací frekvence nesmí být v rezonanci s žádnou tlumenou i netlumenou frekvencí systému, neboť by došlo ke ztrátě říditelnosti systému!!

Praktická doporučení pro volbu periody vzorkování $T = \frac{2p}{\omega_{vz}}$:

Přechodová charakteristika systému

LAFCH (Bode)

