

Doc. Ing. Jiří Melichar, CSc.:

LINEÁRNÍ SYSTÉMY 2

(Učební text)

KKY 2011

Obsah LS1:

ÚVOD

1. STAVOVÁ REPREZENTACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

| | |
|---|----|
| 1.1. Příklady stavového popisu reálných systémů | 6 |
| 1.2. Rovnovážné a ustálené stavy dynamických systémů..... | 12 |
| 1.3. Linearizace nelineárních dynamických systémů | 13 |
| 1.4. Typy rovnovážných stavů LDS a průběh trajektorií systému | 15 |
| 1.5. Stavový model LDS, řešení stavové rovnice | 18 |
| 1.6. Vlastnosti spojitých lineárních dynamických systémů | 20 |
| 1.7. Vstupně-výstupní ekvivalence lineárních dynamických systémů..... | 25 |
| 1.8. Normální formy stavové reprezentace LDS | 28 |

2. PŘENOSOVÁ FUNKCE SPOJITÝCH LDS

| | |
|--|----|
| 2.1. Laplaceova transformace | 32 |
| 2.2. Přenosová funkce, základní pojmy, rozklad na parciální zlomky | 33 |
| 2.3. Algebra blokových schémat | 37 |
| 2.4. Přenosové funkce elementárních členů | 41 |
| 2.5. Souvislosti mezi modely vnitřního a vnějšího popisu LDS..... | 42 |

3. DYNAMICKÉ ODEZVY LDS

| | |
|--|----|
| 3.1. Časové odezvy LDS při vnitřním a vnějším popisu | 47 |
| 3.2. Impulsní a přechodová funkce. Odezva na obecný vstupní signál | 49 |
| 3.3. Frekvenční odezva LDS | 56 |
| 3.4. Fourierova transformace. Frekvenční přenos. | 60 |
| 3.5. Nyquistovy a Bodeho frekvenční charakteristiky | 61 |
| 3.6. Frekvenční charakteristiky pro obecný tvar přenosu | 68 |
| 3.7. Minimálně-fázové a neminimálně-fázové systémy | 73 |

4. REGULAČNÍ OBVOD A STABILITA REGULAČNÍHO OBVODU

| | |
|--|----|
| 4.1. Struktura regulačního obvodu, přímovazební a zpětnovazební řízení..... | 77 |
| 4.2. Přenosy v regulačním obvodu. Regulátory s jedním a dvěma stupni volnosti..... | 79 |
| 4.3. Stabilita a kritéria stability regulačních obvodů..... | 82 |
| 4.4. Robustnost ve stabilitě. Kritické zesílení, bezpečnost v zesílení a bezpečnost ve fázi..... | 91 |
| 4.5. Metoda geometrického místa kořenů | 94 |

5. DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

| | |
|--|-----|
| 5.1. Regulační obvod při diskretním řízení spojitých LDS | 99 |
| 5.2. Funkce diskretní v čase | 103 |
| 5.3. Laplaceova transformace funkcí diskretních v čase. Z-transformace..... | 104 |
| 5.4. Matematické modely pro vnější popis diskretních LDS | 107 |
| 5.5. Diskretní stavový model spojitého LDS s tvarovačem 0. řádu | 110 |
| 5.6. Diskretizace spojitých přenosů na základě aproximace integrálu nebo derivace | 112 |
| 5.7. Transformační vztah $z = e^{pT}$ a převedení pólů spojitého LDS na póly diskretního LDS | 114 |
| 5.8. Stavový model diskretních LDS, explicitní řešení stavové rovnice, základní odezvy | 115 |
| 5.9. Vlastnosti diskretních LDS | 117 |
| 5.10. Vzorkování spojitého signálu a Shannonova věta o rekonstrukci signálu | 120 |

Doporučená a použitá literatura:

- Štecha J., Havlena V.: Teorie dynamických systémů, skr. ČVUT Praha, 2002
Havlena V., Štecha J.: Moderní teorie řízení, , skr. ČVUT Praha, 2000
Goodwin G.C., Graebe S., Salgado M.: Control System Design, Prentice-Hall 2000
Aström K.J., Wittenmark B.: Computer Controlled System: Theory and Design, Prentice-Hall 1997
Wolovich W.A.: Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design, Saunders College Publishing 1994
Leigh J.R.: Applied Digital Control, Prentice Hall 1992

Obsah LS 2:

6. DETERMINISTICKÁ IDENTIFIKACE LDS

| | |
|---|---|
| 6.1. Lineární regrese a metoda nejmenších čtverců | 5 |
|---|---|

7. POŽADAVKY NA REGULAČNÍ OBVOD A NÁVRHOVÁ OMEZENÍ

| | |
|--|----|
| 7.1. Stabilita a robustnost ve stabilitě, korekční články | 8 |
| 7.2. Návrh diskretních korekčních článků | 15 |
| 7.3. Přesnost regulace | 19 |
| 7.4. Dynamický činitel regulace | 20 |
| 7.5. Kmitavost uzavřené regulační smyčky | 23 |
| 7.6. Citlivost uzavřené regulační smyčky na změnu parametrů řízeného systému | 25 |
| 7.7. Tvarování frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky | 25 |
| 7.8. Požadavky na kvalitu regulace v časové oblasti | 28 |
| 7.9. Požadavky na kvalitu regulace v algebraické oblasti | 29 |
| 7.10. Integrovaná omezení a dosažitelná kvalita regulace | 30 |

8. ZÁKLADNÍ TYPY REGULÁTORŮ

| | |
|--|----|
| 8.1. Spojité PID (PI, PD) regulátory | 36 |
| 8.2. Diskretní PID (PI, PD) regulátory | 39 |
| 8.3. Obecný dynamický regulátor | 40 |
| 8.4. Lineární stavový regulátor | 41 |

9. KLASICKÉ METODY NÁVRHU REGULÁTORŮ

| | |
|--|----|
| 9.1. Empirické postupy při návrhu regulátorů | 43 |
| 9.2. Návrh regulátorů dle požadavku na minimum integrálních kritérií kvality | 45 |
| 9.3. Návrh regulátorů s využitím GMK | 50 |
| 9.4. Návrh regulátorů dle požadovaného umístění pólů (nul) uzavřené regulační smyčky | 55 |
| 9.5. Množina stabilizujících regulátorů, afinní parametrizace | 61 |
| 9.6. Návrh regulátoru ze zadaného modelu přenosu uzavřené smyčky | 73 |
| 9.7. Sledování obecného referenčního signálu a kompenzace poruch v ustáleném stavu („princip vnitřního modelu“) | 76 |
| 9.8. Umístitelnost pólů lineárním stavovým regulátorem | 78 |
| 9.9. Lineární stavový regulátor s integrací | 81 |
| 9.10. Lineární stavový regulátor pro sledování obecného referenčního signálu a kompenzaci poruch v ustáleném stavu | 82 |
| 9.11. Lineární stavový regulátor pro konečný počet kroků regulace | 84 |
| 9.12. Dynamický regulátor pro řízení skokové odezvy polohového servosystému s konečným počtem kroků regulace | 87 |
| 9.13. Návrh regulátorů pro LDS s dopravním zpožděním – Smithův prediktor | 91 |

10. REKONSTRUKCE STAVU DETERMINISTICKÉHO SYSTÉMU

| | |
|--|-----|
| 10.1. Lineární asymptotický rekonstruktor stavu | 95 |
| 10.2. Redukovaný rekonstruktor stavu (Luenbergerův, minimální) | 98 |
| 10.3. Lineární stavový regulátor s rekonstruktorem stavu (dynamický kompenzátor) | 102 |
| 10.4. Dynamický kompenzátor v regulačních úlohách | 103 |

11. NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

| | |
|---|-----|
| 11.1. Matematické modely nelineárních dynamických systémů | 106 |
| 11.2. Metoda harmonické linearizace | 107 |
| 11.3. Reléové regulační obvody | 110 |
| 11.4. Ljapunovova teorie stability | 113 |
| 11.5. Analýza stability LDS – Ljapunovy rovnice | 116 |

Doporučená a použitá literatura:

- Štecha J., Havlena V.: Teorie dynamických systémů, skr. ČVUT Praha, 2002
Havlena V., Štecha J.: Moderní teorie řízení, , skr. ČVUT Praha, 2000
Goodwin G.C., Graebe S., Salgado M.: Control System Design, Prentice-Hall 2000
Aström K.J., Wittenmark B.: Computer Controlled System: Theory and Design, Prentice-Hall 1997
Wolovich W.A.: Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design, Saunders College Publishing 1994
Leigh J.R.: Applied Digital Control, Prentice Hall 1992

6. DETERMINISTICKÁ IDENTIFIKACE LDS

V 1. kapitole (LS1) jsme uvedli, že pro získání matematického modelu reálného dynamického systému existují dva přístupy:

- 1/ Určení matematického modelu *na základě matematicko-fyzikálního modelování*, bez nutnosti využití měřitelných veličin na reálném systému. Jedná se tedy o analytický přístup. Struktura modelu je odvozena z fyzikálních zákonů a parametry mají obvykle jednoznačně interpretovatelný fyzikální význam.
- 2/ Určení matematického modelu *na základě experimentů prováděných na reálném systému*. Snahou je získat takový model, který v nějakém definovaném smyslu co nejlépe odpovídá naměřeným reálným veličinám.

Při tomto přístupu je obtížný výběr vhodné struktury modelu (využívá se i poznatků z matematicko-fyzikálního modelování, struktura může být upřesňována), jakmile je však fixována, jedná se vlastně o odhad neznámých parametrů nějakou identifikační metodou.

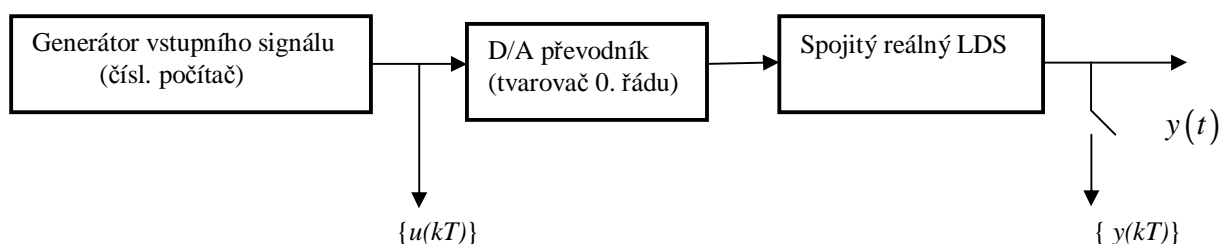
Protože matematicko-fyzikálnímu modelování jsme se věnovali v 1. kapitole LS1 a máme již dostatek poznatků z diskretních LDS, uvedeme jako příklad experimentálního přístupu *deterministickou parametrickou identifikaci* matematického modelu spojitě řízeného reálného systému s použitím číslicového počítače. Předpokládejme, že model chceme určit na základě jednorázového zpracování naměřených dat (*identifikace off-line, nerekurzivní*).

Při experimentálním přístupu k identifikaci systému je nutné věnovat pozornost formulované úloze a podmínkám, za kterých experiment bude probíhat.

Jedná se zejména o výběr:

- a/ vhodného, dostatečně „bohatého“ a jednoduše realizovatelného vstupního signálu, který vybudí všechny módy reálného systému. Za vhodný signál může být považován např. jednotkový skok či po částech konstantní funkce, ale nikoliv např. sinusový signál, který by všechny módy systému nevybudil.
- b/ vhodného modelu – v daném případě např. diskretní přenos či diferenční rovnice zvoleného řádu s neznámými koeficienty - parametry.
- c/ identifikační metody

Blokové schéma experimentu :



K dispozici tedy máme známou posloupnost diskretních hodnot $\{u(kT)\}$ generovaného vstupního signálu a posloupnost diskretních hodnot $\{y(kT)\}$, získanou měřením výstupní veličiny spojitě reálného LDS pro $k = 0, 1, \dots$

Je zřejmé, že matematický model spojitě reálného LDS nelze získat přímo, neboť ze souborů diskretních dat lze určit pouze matematický model spojitě systému včetně tvarovače 0. řádu. Model spojitě reálného LDS určíme až následně s využitím převodních vztahů uvedených v odstavci 5.5.

6.1. Lineární regrese a metoda nejmenších čtverců

Mezi vstupní posloupností $\{u(kT)\}$ a výstupní posloupností $\{y(kT)\}$ diskretních hodnot musí existovat kauzální vztah, který budeme respektovat výběrem nějakého matematického modelu zvolené struktury s neznámými parametry. Jako vhodný model můžeme vybrat např. diskretní přenos se zvoleným stupněm n polynomu ve jmenovateli a s relativním řádem 1 (výstup diskretního systému reaguje na vstup se zpožděním jedné periody vzorkování)

$$F_S(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (6.1)$$

kterému odpovídá diferenční rovnice n-tého řádu s neznámými koeficienty $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (6.2)$$

Diferenční rovnici je vhodné přepsat do *regresního tvaru (regresního modelu)*

$$y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) \quad (6.3)$$

který vyjadřuje předpokládanou kauzální závislost naměřených dat. Pokud by zvolený model svou strukturou přesně odpovídal reálnému systému a měřená data by byla získávána přesně, pro určení $2n$ neznámých parametrů by bylo nutné provést $2n$ měření. Budeme-li realisty, musíme připustit, že model nemusel být zvolen adekvátně a že měření jsou získávána s nějakou chybou. Tyto skutečnosti budeme respektovat v každém měření zavedením chyby $e(k)$ do regresního modelu

$$y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + e(k) \quad (6.4)$$

Provedeme-li postupně l měření od nějakého okamžiku k , můžeme regresní model (6.4) zapsat v maticovém tvaru

| |
|--|
| $\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ y(k+l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(k-1) & \mathbf{L} & -y(k-n); & u(k-1) & \mathbf{L} & u(k-n) \\ -y(k) & \mathbf{L} & -y(k-n+1); & u(k) & \mathbf{L} & u(k-n+1) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ -y(k+l-1) & \mathbf{L} & -y(k-n+l); & \mathbf{L} & \mathbf{L} & u(k-n+l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \mathbf{M} \\ a_n \\ b_1 \\ \mathbf{M} \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(k) \\ e(k+1) \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ e(k+l) \end{bmatrix}$ |
| <p>respektive</p> $y_m = \Phi q + e \quad (6.5)$ <p>$y_m \dots$ vektor měření, $\Phi \dots$ matice regresorů, $q \dots$ vektor parametrů, $e \dots$ vektor chyb.</p> |

Provedeme-li větší počet měření než je počet neznámých parametrů, $l > 2n$, lze identifikaci neznámých parametrů q převést na optimalizační úlohu určení optimálního vektoru q^* tak, aby bylo minimalizováno kritérium ve tvaru součtu čtverců chyb měření

$$J(q) = \sum_{j=k}^{k+l} e^2(j, q) \quad \text{resp. vektorově} \quad J(q) = e^T(q) e(q).$$

Optimální vektor parametrů je potom určen z podmínky

$$q^* = \arg \min_q J(q) = \arg \min_q \{e^T(q) e(q)\}, \quad \text{kde } e = y_m - \Phi q \quad (6.6)$$

Rozepsáním dostaneme

$$q^* = \arg \min_q \{(y_m - \Phi q)^T (y_m - \Phi q)\} = \arg \min_q \{y_m^T y_m + q^T \Phi^T \Phi q - y_m^T \Phi q - q^T \Phi^T y_m\}$$

a z nutné podmínky minima $\frac{\partial \{L\}}{\partial q^T} \Big|_{q=q^*} = 0$ dostáváme optimální hodnotu parametrů

$$q^* = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y_m \quad (6.7)$$

Výraz $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$ je *zobecněná inverze obdélníkové matice Φ (Penroseova inverze, Matlab: pinv)*

Příklad 6.1: Ilustrace použití metody nejmenších čtverců pro identifikaci parametrů přenosu spojitého systému ze simulovaných dat

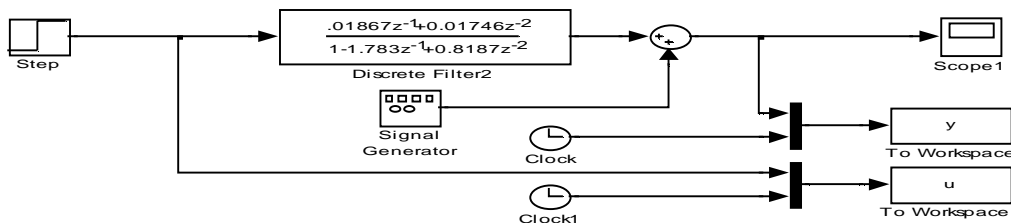
Předpokládejme, že známe přenos spojitého LDS: $F_S(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$

Zvolíme-li periodu vzorkování $T = 0.2$ sec. , potom diskrétní přenos spojitého systému s tvarovačem

nultého řádu na vstupu bude: $F_S(z) = \frac{0.01867z + 0.01746}{z^2 - 1.783z + 0.8187} = \frac{b_1z + b_2}{z^2 + a_1z + a_2}$

Simulace vstupních a výstupních dat pro identifikaci parametrů:

Použijme tento diskrétní model jako simulační model pro získání vstupních a výstupních dat, které použijeme pro ilustraci identifikační metody. Model vybudíme vstupním signálem $u(kT)$ ve tvaru jednotkového skoku, zpožděného o 1sec. K výstupu systému můžeme přičíst náhodný signál simulující nepřesnost modelu či měření. Uložme si např. 30 vstupních a výstupních hodnot do pracovní oblasti - viz schéma v Simulinku:



Získaná data použijeme v metodě nejmenších čtverců pro zpětné určení („známých“) parametrů diskrétního přenosu $F_S(z)$. Nejprve určíme matici regresorů podle (6.5) a následně vektor neznámých parametrů q^* ze vztahu (6.7):

```
for i = 1:1:30
for j = 1:1:2
Phi(i, j) = -y(5 + i - j);
Phi(i, j + 2) = u(5 + i - j);
end ;
end ;
pseudoinvPhi = pinv(Phi);
for i = 1:1:30
ym(i) = y(5 + i)
end ;
q* = pseudoinvPhi * ym^T
```

Nepůsobí-li náhodný signál na měřený výstup, určené parametry q^* odpovídají parametrům diskrétního přenosu $F_S(z)$. Použitím Matlabu d2c určíme zpětně přenos daného spojitého systému:

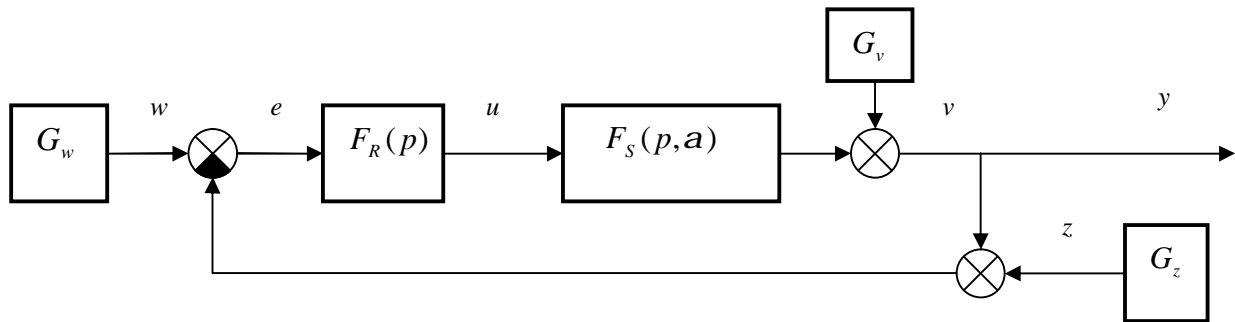
$$q^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7830 \\ 0.8187 \\ 0.0187 \\ 0.0175 \end{bmatrix}, F_S(z) = \frac{0.0187z + 0.0175}{z^2 - 1.7830z + 0.8187} \rightarrow F_S(p) = \frac{1.0018}{p^2 + p + 0.9815}$$

Působí-li na měřený výstup např. náhodný signál s amplitudou 0.01 a frekvencí 0.01rad/sec., určené parametry diskrétního i spojitého přenosu systému se již liší od parametrů v zadaných přenosech:

$$q^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.74 \\ 0.78 \\ 0.0299 \\ 0.0097 \end{bmatrix}, F_S(z) = \frac{0.0299z + 0.0097}{z^2 - 1.74z + 0.78} \rightarrow F_S(p) = \frac{0.0528p + 1.1224}{p^2 + 1.242p + 1.1354}$$

7. POŽADAVKY NA REGULAČNÍ OBVOD A NÁVRHOVÁ OMEZENÍ

Obvykle kladené požadavky na funkci a vlastnosti regulačního obvodu vysvětlíme na základním tvaru regulačního obvodu s dynamickým regulátorem s jedním stupněm volnosti (1DoF regulátor). Uvažovaná struktura regulačního obvodu je na následujícím schéma,



kde w, e, u označují po řadě referenční signál, regulační odchylku a řízení. Měřený a současně regulovaný výstup je označen y . Výskyt deterministické poruchy v řízeném systému (má obvykle charakter „nízkofrekvenční“ poruchy a může být měřitelná či neměřitelná) respektujeme poruchou v , která je přepočtena na výstup řízeného systému. Porucha z zastupuje poruchy vzniklé měřením regulované veličiny y , považujeme ji za „vysokofrekvenční“ poruchu a snažíme se ji odfiltrout. V přenosové funkci $F_S(p, a)$ označuje a parametry řízeného systému.

Regulační úloha předpokládá návrh zpětnovazebního, realizovatelného regulátoru $F_R(p)$, který zaručí, aby změny požadované hodnoty regulované veličiny $y(t)$, zadávané referenčním signálem $w(t)$, byly realizovány přesně, co nejrychleji a s požadovanou kvalitou přechodového děje a to i při působících poruchách a možných změnách parametrů řízeného systému či regulátoru.

Označíme-li $F_o(p) = F_S(p, a)F_R(p)$, potom v dané struktuře regulačního obvodu je obraz regulované veličiny dán vztahem

$$Y(p) = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)}W(p) + \frac{1}{1 + F_o(p)}V(p) - \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)}Z(p) \quad (7.1)$$

Je zřejmé, že požadavky kladené na průběh regulované veličiny budou současně omezovány požadavky kladenými na potlačení či kompenzaci poruch a že návrh regulátoru bude obvykle vycházet z kompromisních požadavků a podléhat nějakým návrhovým omezením.

Mezi základní požadavky na vlastnosti regulačního obvodu patří zejména:

Stabilita a robustnost ve stabilitě, přesnost regulace, kmitavost uzavřené regulační smyčky, potlačení harmonických poruch, kvalita regulace a citlivost na změnu parametrů.

Požadavky lze formulovat a interpretovat v časové oblasti, ve frekvenční oblasti či algebraicky. Pro návrh regulátoru je nutná specifikace jeho struktury a určení jeho parametrů. Při regulaci se používají i složitější struktury - kaskádní, extrémální, poměrová, s vnitřním modelem systému aj.

7.1. Stabilita a robustnost ve stabilitě, korekční články

Uzavřený regulační obvod by měl být stabilní a měl by vykazovat i určitou **robustnost ve stabilitě** (viz Kap.4). Robustnost charakterizujeme požadovanou **bezpečností v zesílení** $1/K_0$, určenou z frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu $F_o(j\omega)$ při $\omega = \omega_{krit}$ a **bezpečností ve fázi** g , určenou při $\omega = \omega_0$. Obvykle požadujeme $1/K_0 > 2$, $g > 40^\circ$.

Robustnost ve stabilitě lze ovlivnit návrhem jednoduchých (případně násobných) **korekčních článků s derivačním nebo integračním charakterem**. Korekční články tvarují amplitudový a fázový průběh $F_o(j\omega)$, jsou zařazeny před řízený systém a zastupují v regulačním obvodu funkci regulátoru. Jejich návrh vychází ze specifikace hodnot ω_{krit}, ω_0 a požadavků na robustnost ve stabilitě. V anglosaské literatuře je řízení pomocí korekčních článků nazýváno „lead-lag control“.

Korekcí se ovlivní všechny další vlastnosti regulačního obvodu a je zřejmé, že jednoduché korekční články nemohou splnit přísnější požadavky na vlastnosti uzavřeného regulačního obvodu.

Derivační korekční článek.

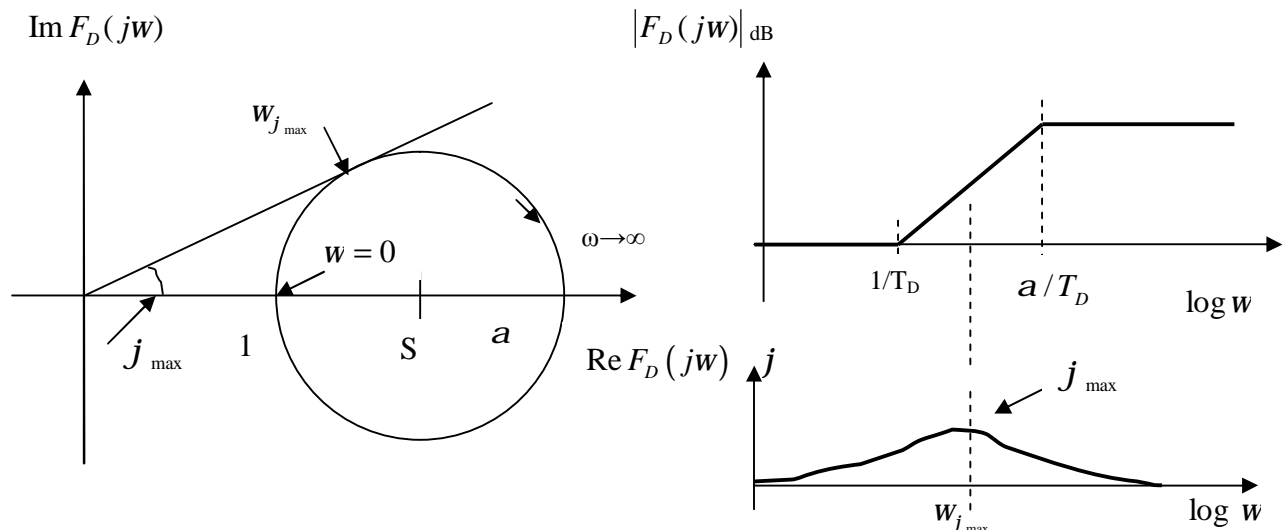
Přenos derivačního článku budeme uvažovat ve tvaru

$$F_D(j\omega) = K \frac{j\omega T_D + 1}{j\omega \frac{T_D}{a} + 1}; \quad a > 1 \quad (7.2)$$

Článek zavádí do frekvenčního přenosu otevřené regulační smyčky $F_o(j\omega) = F_s(j\omega)F_D(j\omega)$ fázový předstih, zvětšuje šířku pásma regulace a zvyšuje rychlost odezvy (hodnota pólu je větší než hodnota nuly a z pohledu GMK je zřejmé, že průsečík asymptot s reálnou osou

$q = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n - m}$ se posouvá více vlevo do stabilní komplexní poloroviny).

Nyquistova frekvenční charakteristika v komplexní rovině, přímková aproximace Bodeho logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky a fázová frekvenční charakteristika derivačního korekčního článku jsou znázorněny pro $K = 1$ na následujících grafech:



Pro $w \in (-\infty, \infty)$ má Nyquistova charakteristika tvar kružnice, kterou získáme vyloučením w z rovnic pro reálnou a imaginární část:

$$F_D(j\omega) = \frac{j\omega T_D + 1}{j\omega \frac{T_D}{a} + 1} = \frac{w^2 \frac{T_D^2}{a} + 1}{w^2 \frac{T_D^2}{a^2} + 1} + j \frac{w T_D \left(\frac{a-1}{a} \right)}{w^2 \frac{T_D^2}{a^2} + 1} = \text{Re } F_D(j\omega) + j \text{Im } F_D(j\omega) = u + jv \quad (7.3)$$

$$\Rightarrow \dots \left(u - \frac{1+a}{2} \right)^2 + v^2 = \left(\frac{a-1}{2} \right)^2 \quad (7.4)$$

Pro frekvence $w \in [0, \infty)$ uvažujeme pouze horní půlkružnici s vyznačenou orientací rostoucí w . Pro fázový předstih $j(w)$, $w \in [0, \infty)$, platí

$$\text{tg } j(w) = \frac{\text{Im } F_D(j\omega)}{\text{Re } F_D(j\omega)} = \frac{w T_D \left(\frac{a-1}{a} \right)}{w^2 \frac{T_D^2}{a} + 1} \quad (7.5)$$

Maximální fázový předstih j_{\max} je dán tečnou ke kružnici vedenou z počátku komplexní roviny.

Z nutné podmínky extrému (pro $w = w_{j_{\max}}$ musí platit $\frac{d}{dw}[\text{tg}j(w)] = 0$) určíme nejprve frekvenci $w_{j_{\max}}$, při které nastává maximální fázový předstih j_{\max} .

Maximální fázový předstih určíme dosazením za $w_{j_{\max}}$ do (7.2): $j_{\max} = \arg F_D(jw) \Big|_{w=w_{j_{\max}}}$.

Dostaneme

$$w_{j_{\max}} = \frac{\sqrt{a}}{T_D} \quad \text{a} \quad j_{\max} = \arctg w_{j_{\max}} T_D - \arctg w_{j_{\max}} \frac{T_D}{a} = \arctg \sqrt{a} - \arctg \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (7.6)$$

Derivační korekční článek zavádí fázový předstih do frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky, frekvence w_0 se oproti nekorigovanému přenosu volí v oblasti vyšších hodnot.

Frekvence w_0 , vyhovující podmínce $|F_o(jw_0)| = 1$, resp. $|F_o(jw_0)|_{dB} = 0dB$ ovlivní požadovanou šířku pásma regulace a parametry korekčního článku. Současně je nutné sledovat bezpečnost v zesílení $1/K_0$, která je určena polohou w_{krit} : $K_0 = |F_o(jw_{krit})|$, $\arg F_o(jw_{krit}) = -180^0$.

Poznámka 7.1.

Korekci bezpečnosti ve fázi či zesílení bychom mohli provést i pouhou změnou zesílení otevřené regulační smyčky resp. korekčního článku. Změna zesílení je však frekvenčně nezávislá a neumožňuje žádoucí „frekvenční tvarování zisku“ otevřené regulační smyčky.

V dalším předpokládáme, že zesílení otevřené regulační smyčky bylo fixováno na $K = 1$.

Postup při návrhu korekčního článku.

Dobrou orientaci při návrhu poskytují zejména Bodeho frekvenční charakteristiky, a to i jejich přímková aproximace. Z charakteristik lze usoudit na reálnost kladených požadavků tj. na možnost docílení požadovaného průběhu $F_0(jw_0)$.

Protože při $w = w_0$ je definována bezpečnost ve fázi g , $g = 180^0 + \arg F_0(jw_0)$, můžeme např. požadovat, aby při zvoleném w_0 bylo návrhem korekčního článku dosaženo požadované bezpečnosti ve fázi g_z .

Parametry T_D, a derivačního článku jsou potom dány řešením rovnic

$$|F_o(jw_0)| = |F_s(jw_0)F_D(jw_0)| = 1 \quad \text{a} \quad \arg [F_s(jw_0)F_D(jw_0)] = -180^0 + g_z. \quad (7.7)$$

Korekce ovšem změní i další vlastnosti systému, a proto se v praxi korekční článek obvykle navrhuje iterativně, přičemž se doporučuje volba T_D v okolí T_{\max} (největší časová konstanta systému) a $a \in [5, 50]$.

Pro korigovaný přenos otevřeného regulačního obvodu se určí přenos uzavřeného regulačního obvodu $F_z(jw)$ a analyzují se dosažené vlastnosti (robustnost ve stabilitě, šířka pásma regulace w_s , doba regulace T_{reg} , přeregulování $S_{\%}$ a j.). Je-li nutná korekce navrženého $F_D(jw)$, upravujeme obvykle volbu w_0 a vypočteme nové hodnoty parametrů T_D, a .

Poznámka 7.2.

Volba w_0 ovlivňuje šířku pásma regulace, vymezenou frekvencí w_s , při které je zisk uzavřené regulační smyčky roven $-3dB$. Nás však zajímá, jak lze „predikovat“ chování uzavřené regulační smyčky z frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky. V literatuře lze nalézt pro „typický“ průběh LAFCH orientační stanovení w_s , které je vymezeno pásmem frekvencí, kde

$$|F_o(jw)|_{dB} \in [-6dB, -7.5dB] \quad \text{a} \quad \arg F_o(jw) \in [-135^0, -225^0].$$

Pokud by přenos uzavřené regulační smyčky $F_z(jw)$ byl kmitavým systémem 2. řádu, lze určit jeho relativní tlumení x a netlumenou frekvenci w_n a odvodit následující vztahy:

$$w_s = w_n \sqrt{(1-x^2) + \sqrt{x^4 - 4x^2 + 2}} \quad \text{a} \quad w_n = \frac{4}{T_{reg} x} \quad \text{resp.} \quad T_{reg} = \frac{4}{w_n x} \quad (7.8)$$

Uvedené vztahy lze přiměřeně použít i pro přenos uzavřené regulační smyčky vyššího řádu, pokud je redukovatelný na dominantní kmitavý systém 2. řádu.

Příklad 7.1: Návrh derivačního korekčního članku dle požadované bezpečnosti ve fázi.

K systému $F_s(p) = \frac{1}{p^2}$ navrhnete derivační korekční článek $F_D(p) = \frac{T_D p + 1}{\frac{T_D}{a} p + 1}$, $a > 1$ tak,

aby při $w_0 = 2 \text{ rad/sec}$. byla dosažena bezpečnost ve fázi $g_z = 45^\circ$!

$$\text{Přenos otevřené regulační smyčky : } F_o(jw) = F_s(jw)F_D(jw) = \frac{jwT_D + 1}{(jw)^2(jw\frac{T_D}{a} + 1)}$$

Pro požadovanou velikost bezpečnosti ve fázi g_z při frekvenci w_0 musí platit:

$$1/ |F_o(jw_0)| = |F_s(jw_0)F_D(jw_0)| = 1 \quad 2/ \arg F_o(jw_0) = -180^\circ + g$$

Po rozepsání dostaneme dvě rovnice pro dvě neznámé T_D, a :

$$1/ \frac{\sqrt{1 + w_0^2 T_D^2}}{\sqrt{w_0^6 \frac{T_D^2}{a^2} + w_0^4}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 64T_D^2 - 4a^2 T_D^2 + 15a^2 = 0$$

$$2/ \arg F_o(jw_0) = \arctg(w_0 T_D) - 180^\circ - \arctg\left(\frac{w_0 T_D}{a}\right) = -180^\circ + g_z$$

Druhou rovnici upravíme. Po dosazení za w_0 a g dostáváme $\arctg(2T_D) - \arctg\left(\frac{2T_D}{a}\right) = 45^\circ$

$$\text{Protože platí } \arctg(a - b) = \frac{\arctg a - \arctg b}{1 + \arctg a \arctg b}, \text{ dostáváme } \frac{\arctg(2T_D) - \arctg\left(\frac{2T_D}{a}\right)}{1 + \frac{4T_D^2}{a}} = \arctg 45^\circ = 1$$

$$\text{a po úpravě } a = \frac{2T_D(1 + 2T_D)}{2T_D - 1} \quad \text{resp.} \quad a^2 = \frac{4T_D^2(1 + 2T_D)^2}{(2T_D - 1)^2}$$

Po dosazení za a^2 do první rovnice dostaneme: $-64T_D^4 - 32T_D^3 + 480T_D^2 - 136T_D + 124 = 0$

Rovnice má jediné reálné kladné řešení: $T_D = 2.3983$ sec. Z druhé rovnice dostaneme $a = 7.3234$

Hledaný derivační korekční článek má přenos:

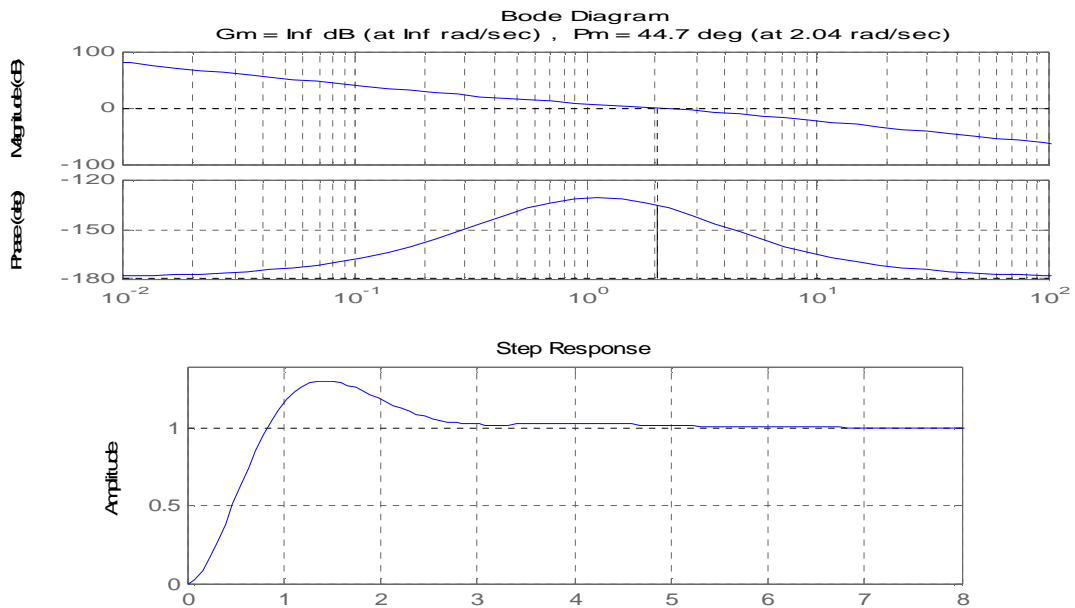
$$F_D(p) = \frac{T_D p + 1}{\frac{T_D}{a} p + 1} = \frac{2.3983 p + 1}{0.3275 p + 1}$$

Přenos otevřené regulační smyčky :

$$F_o(p) = F_s(p)F_D(p) = \frac{T_D p + 1}{p^2 \left(\frac{T_D}{a} p + 1\right)} = \frac{2.3983 p + 1}{0.3275 p^3 + p^2}$$

Kontrola návrhu: MATLAB (margin, feedback, step) : $g = 44.7^\circ$ při $w_0 = 2.04$ rad/sec.

Přechodová charakteristika uzavřené regulační smyčky má 30% přeregulování, $T_{reg} \cong 5$ sec.



Z příkladu je vidět, že exaktní návrh korekčního članku ve složitějším případě může být obtížný, a proto v praxi často používáme iterativní postup, vycházející z přímé volby T_D a a .

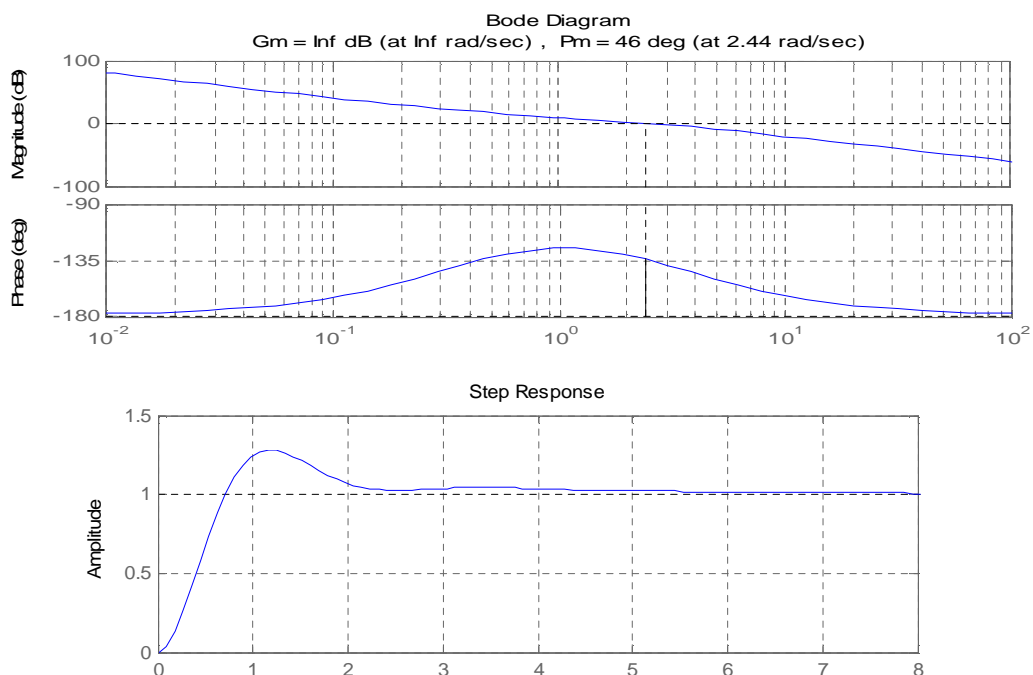
Z analýzy aproximovaného tvaru LAFCH se nabízí např. volba: $T_D = 3$ sec. a $a = 10$.

Pro tuto volbu je přenos derivačního korekčního članku $F_D(p) = \frac{T_D p + 1}{\frac{T_D}{a} p + 1} = \frac{3p + 1}{0.3p + 1}$

a přenos otevřené regulační smyčky $F_o(p) = F_S(p)F_D(p) = \frac{T_D p + 1}{p^2(\frac{T_D}{a} p + 1)} = \frac{3p + 1}{0.3p^3 + p^2}$

Kontrola návrhu: MATLAB (margin, feedback, step): $g = 46^0$ při $w_0 = 2.44$ rad/sec.

Přechodová charakteristika uzavřené reg. smyčky má 25% přeregulování, $T_{reg} \cong 5$ sec.



Integrační korekční článek.

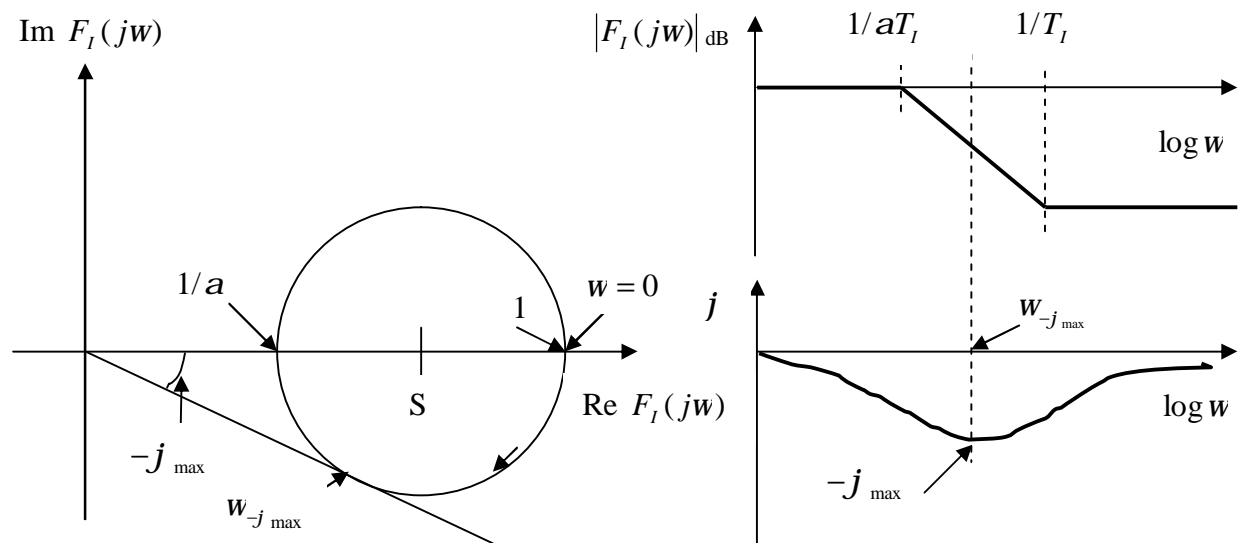
Přenos integračního článku budeme uvažovat ve tvaru

$$F_I(j\omega) = K \frac{j\omega T_I + 1}{j\omega a T_I + 1}; \quad a > 1 \quad (7.9)$$

Článek zavádí do frekvenčního přenosu otevřené regulační smyčky $F_o(j\omega) = F_S(j\omega)F_D(j\omega)$ fázové zpoždění, zmenšuje šířku pásma regulace a snižuje rychlost odezvy (hodnota pólu je menší než hodnota nuly a z pohledu GMK je zřejmé, že průsečík asymptot s reálnou osou

$q = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n - m}$ se posouvá více vpravo ve stabilní komplexní polorovině).

Nyquistova frekvenční charakteristika v komplexní rovině, přímková aproximace Bodeho logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky a fázové frekvenční charakteristiky integračního korekčního článku jsou znázorněny pro $K=1$ na následujících grafech:



Analogicky k derivačnímu článku bychom odvodili, že pro $\omega \in (-\infty, \infty)$ má Nyquistova charakteristika opět tvar kružnice, přičemž pro frekvence $\omega \in [0, \infty)$ uvažujeme pouze dolní půlkružnici s vyznačenou orientací pro rostoucí ω .

Dále lze analogicky určit frekvenci $\omega_{-j_{\max}}$ a maximální fázové zpoždění $-j_{\max}$:

$$\omega_{-j_{\max}} = \frac{1}{T_I \sqrt{a}} \quad -j_{\max} = -\arctg \sqrt{a} + \arctg \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (7.10)$$

Integrační korekční článek zavede do frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky fázové zpoždění, frekvence ω_0 se oproti nekorigovanému přenosu volí v oblasti nižších hodnot.

Frekvence ω_0 , vyhovující podmínce $|F_o(j\omega_0)| = 1$, resp. $|F_o(j\omega_0)|_{dB} = 0dB$, ovlivní požadovanou šířku pásma regulace a od její volby jsou odvozeny parametry korekčního článku. Opět sledujeme bezpečnost v zesílení $1/K_0$, určenou při ω_{krit} : $\arg F_o(j\omega_{krit}) = -180^\circ$ a $K_0 = |F_o(j\omega_{krit})|$.

Postup při návrhu integračního korekčního článku je analogický jako při návrhu derivačního článku. Požadujeme např., aby při zvoleném ω_0 bylo návrhem korekčního článku dosaženo požadované bezpečnosti ve fázi g_z .

Parametry T_I, a integračního článku lze určit řešením rovnic

$$|F_o(j\omega_0)| = |F_S(j\omega_0)F_I(j\omega_0)| = 1 \quad \text{a} \quad \arg [F_S(j\omega_0)F_I(j\omega_0)] = -180^\circ + g_z. \quad (7.11)$$

Korekce změny i další vlastnosti systému, a proto se v praxi korekční člunek navrhuje iterativně, přičemž se doporučuje volba T_I tak, aby $\frac{1}{T_I} < \omega_0$ a $a \in [5, 50]$.

Pro zkorigovaný přenos otevřeného regulačního obvodu se určí přenos uzavřeného regulačního obvodu $F_z(j\omega)$ a analyzují se dosažené vlastnosti (robustnost ve stabilitě, šířka pásma regulace ω_s , doba regulace T_{reg} , přeregulování $s_{\%}$ a j). Je-li nutná korekce navrženého $F_I(j\omega)$, upravujeme volbu ω_0 a vypočteme nové hodnoty parametrů T_I , a .

Návrh derivačních či integračních korekčních článků (v anglo-saské literatuře “lead-lag control”) lze považovat za jednoduchou a v podstatě heuristickou frekvenční metodu syntézy, která vychází ze specifikace jednoho bodu frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky $F_o(j\omega_0)$ a nemůže tedy garantovat požadované chování pro obecnou třídu spojitých LDS. Lze však navrhnout i složitější (násobné) korekční články.

Frekvenční omezení při návrhu korekčních článků pro neminimálně-fázové systémy

V odstavci 3.7. (LS1) jsme ukázali, že přenosová funkce systému s nestabilními nulami a/nebo póly může být zapsána ve faktorizovaném tvaru sestávajícím z neminimálně-fázové a minimálně-fázové části

$$F_S(p) = F_{nmf}(p)F_{mf}(p),$$

přičemž faktorizace je provedena tak, aby neminimálně-fázová část měla tvar “all-pass” filtru:

$$F_{nmf}(p) = \frac{-p + z_k}{p + z_k} \quad (\text{pro nestabilní nulu}) \quad F_{nmf}(p) = \frac{p + p_k}{p - p_k} \quad (\text{pro nestabilní pól})$$

Z frekvenčního pohledu má all-pass filtr $F_{nmf}(j\omega)$ jednotkové zesílení $\forall \omega$, neovlivní tedy průběh LAFCH otevřené regulační smyčky, ale zavede dodatečné, frekvenčně závislé fázové zpoždění $j_{nmf}(\omega)$ k fázovému zpoždění $j_{mf}(\omega)$ přenosové funkce $F_{mf}(j\omega)$, a tedy i do průběhu LFFCH!

V případě *nestabilní nuly* je pro $\omega \in [0, \infty)$ fázové zpoždění z intervalu $j_{nmf}(\omega) \in [0^\circ, -180^\circ)$, v případě *nestabilního pólu* je pro $\omega \in [0, \infty)$ fázové zpoždění z intervalu $j_{nmf}(\omega) \in (-180^\circ, 0^\circ]$.

Poznámka:

Použijeme-li Matlab pro výpočet Bodeho frekvenčních charakteristik neminimálně-fázových systémů, zjistíme, že výpočet nepodporuje žádoucí ilustraci dodatečného fázového zpoždění způsobeného all-pass filtrem a nezískáme výše uvedené intervaly fázového zpoždění.

Je to způsobeno jiným označením kvadrantů komplexní roviny, a tedy i výpočtem fáze frekvenční charakteristiky all-pass filtru.

Výpočet průběhu fáze all-pass filtru s nestabilní nulou resp. pólem ($z_k = +1$, $p_k = +1$).

Nestabilní nula:

$$F_{nmf}(j\omega) = \frac{-j\omega + 1}{j\omega + 1} = \frac{1 - \omega^2}{\omega^2 + 1} - j \frac{2\omega}{\omega^2 + 1} = \text{Re } F_{nmf}(j\omega) + j \text{Im } F_{nmf}(j\omega), \quad j(\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im } F_{nmf}(j\omega)}{\text{Re } F_{nmf}(j\omega)}$$

$$\text{Pro } 0 \leq \omega \leq 1 : \text{Re } F_{nmf}(j\omega) \geq 0, \text{Im } F_{nmf}(j\omega) \leq 0 \rightarrow j(\omega) \in [0^\circ, -90^\circ]$$

$$\text{Pro } 1 < \omega < \infty : \text{Re } F_{nmf}(j\omega) \leq 0, \text{Im } F_{nmf}(j\omega) \leq 0 \rightarrow j(\omega) \in (-90^\circ, -180^\circ)$$

$$\text{Pro } \omega \in [0, \infty) \text{ je fázové zpoždění all-pass filtru z intervalu } j(\omega) \in [0^\circ, -180^\circ].$$

Nestabilní pól:

$$F_{nmf}(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega - 1} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 + 1} - j \frac{2\omega}{\omega^2 + 1} = \operatorname{Re} F_{nmf}(j\omega) + j \operatorname{Im} F_{nmf}(j\omega), \quad j(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} F_{nmf}(j\omega)}{\operatorname{Re} F_{nmf}(j\omega)}$$

$$\text{Pro } 0 \leq \omega \leq 1 : \operatorname{Re} F_{nmf}(j\omega) \leq 0, \operatorname{Im} F_{nmf}(j\omega) \leq 0 \rightarrow j(\omega) \in [-180^\circ, -90^\circ]$$

$$\text{Pro } 1 < \omega < \infty : \operatorname{Re} F_{nmf}(j\omega) \geq 0, \operatorname{Im} F_{nmf}(j\omega) \leq 0 \rightarrow j(\omega) \in (-90^\circ, 0^\circ)$$

Pro $\omega \in [0, \infty)$ je fázové zpoždění all-pass filtru z intervalu $j(\omega) \in (-180^\circ, 0^\circ]$.

Předpokládejme, že chceme navrhnout korekční člunek $F_K(p)$ k neminimálně-fázovému systému s přenosem $F_S(p)$, který má nestabilní nulu a/nebo pól. Protože nestabilní faktory nelze krátit, bude mít nestabilní nulu a/nebo pól i přenos otevřené regulační smyčky

$$F_o(j\omega) = F_S(j\omega) F_K(j\omega) = F_{nmf}(j\omega) F_{mf}(j\omega) F_K(j\omega)$$

Při návrhu korekčního člunku dle požadované bezpečnosti ve fázi g_z při frekvenci ω_0 určíme parametry korekčního člunku z rovnic pro amplitudu a fázi otevřené regulační smyčky

$$\begin{aligned} |F_o(j\omega_0)| &= |F_S(j\omega_0) F_K(j\omega_0)| = |F_{nmf}(j\omega_0) F_{mf}(j\omega_0) F_K(j\omega_0)| = 1 \\ \arg F_o(j\omega_0) &= \arg F_{nmf}(j\omega_0) + \arg F_{mf}(j\omega_0) + \arg F_K(j\omega_0) = -180^\circ + g_z \end{aligned}$$

Oproti minimálně fázovému systému dochází u neminimálně-fázových systémů ve fázové rovnici otevřené regulační smyčky k rychlejšímu poklesu fáze a pro dosažení požadované bezpečnosti ve fázi g_z je nutné volit nižší hodnotu ω_0 . To ovšem způsobí snížení šířky pásma regulace!

Z průběhu fázového zpoždění u "all-pass" filtrů s nestabilním pólem a nulou vyplývá, že nestabilní pól omezuje dosažitelnou šířku pásma regulace zdola a nestabilní nula shora.

7.2. Návrh diskretních korekčních článků.

Chceme-li navrhnout ke spojitému systému s přenosem $F_S(p)$ nějaký *diskretní korekční člunek* s přenosem $F_K(z)$, můžeme použít opět dva principiálně odlišné přístupy, podobně jako při návrhu diskretních regulátorů (viz odst. 5.1.).

Přístupy se liší podle toho, zda výchozím modelem řízeného systému je *spojitý přenos řízeného systému nebo diskretní přenos, zahrnující tvarovač 0. řádu.*

Protože návrh korekčních článků se provádí ve frekvenční oblasti, ukážeme, že první přístup využívá *frekvenční charakteristiku spojitého systému* a druhý přístup tzv. *pseudofrekvenční charakteristiku*, jako aproximaci frekvenční charakteristiky diskretního systému.

Návrh diskretního korekčního člunku s využitím frekvenční charakteristiky spojitého systému

- 1/ Východiskem návrhu je spojitý přenos systému $F_S(p)$, respektive frekvenční přenos $F_S(j\omega)$, při $p = j\omega$. Frekvence ω je definována vztahem $\omega = \operatorname{Im} p$.
- 2/ Ve frekvenčních charakteristikách spojitého systému provedeme návrh spojitého korekčního člunku podle odst. 7.1. a získáme $F_K(j\omega)$ resp. $F_K(p)$ při $p = j\omega$.
- 3/ Diskretní přenos korekčního člunku $F_K(z)$ získáme diskretizací s použitím lichoběžníkové

aproximace: $F_K(z) = F_K(p)$ při dosazení za $p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ - viz Matlab: `c2d(sys, T, 'tustin')`.

Problémem je volba perioda vzorkování T , není respektována funkce tvarovače a výsledný návrh nemusí být uspokojivý.

Návrh diskretního korekčního článku s využitím pseudofrekvenční charakteristiky

1/ Východiskem návrhu je diskretní přenos spojitého systému s tvarovačem 0. řádu

$$F_S(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} F_S(p) \right\}. \text{ Pro diskretní přenos platí } F_S(z) = F_S(e^{pT}) \text{ a pro frekvenční}$$

přenos diskretního systému $F_S(e^{j\omega T}) = F(e^{pT}) \Big|_{p=j\omega}$, $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$.

Nabízí se možnost provést návrh korekčního článku ve frekvenční charakteristice diskretního přenosu $F_S(e^{j\omega T})$, návrh však bude z důvodu matematických potíží obtížný (imaginární osa $+j\omega$ se zobrazí na jednotkovou půlkružnici, frekvenci uvažujeme v intervalu $\omega \in [0, p/T)$, kde p/T je Nyquistova frekvence (viz LS1, odst. 5.7).

Například průběh fáze aperiodického členu 1. řádu bude v intervalu $j \in [0, -180^\circ)$!

Z těchto důvodů je vhodné provést návrh korekčního článku v *aproximované frekvenční charakteristice diskretního přenosu – v tzv. pseudofrekvenční charakteristice*.

2/ K přenosu $F_S(z)$ určíme „pseudofrekvenční přenos“ $F_S(j\hat{\omega})$ s použitím lichoběžníkové

$$\text{aproximace } F_S(\hat{p}) = F_S(z), \text{ při } z = \frac{2 + \hat{p}T}{2 - \hat{p}T}, \text{ přičemž } \hat{p} = j\hat{\omega}.$$

Platí tudíž

$$\hat{\omega} = \text{Im } \hat{p} = \text{Im} \left\{ \frac{2z - 1}{Tz + 1} \right\} \quad (7.12)$$

Úpravou tohoto vztahu dostaneme požadavek na volbu periody vzorkování T , při které bude pseudofrekvence $\hat{\omega}$ dostatečně přesnou aproximací skutečné frekvence ω v uvažovaném pásmu frekvencí, kde je navrhován korekční článek (obvykle v okolí frekvence ω_0 , kde LAFCH prochází osou 0dB a určujeme bezpečnost ve fázi):

$$\begin{aligned} \hat{\omega} = \text{Im } \hat{p} &= \text{Im} \left\{ \frac{2z - 1}{Tz + 1} \right\} = \frac{2}{T} \text{Im} \left\{ \frac{[(\cos \omega T - 1) + j \sin \omega T][(\cos \omega T + 1) - j \sin \omega T]}{(\cos \omega T + 1)^2 + \sin^2 \omega T} \right\} = \\ &= \frac{2}{T} \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} = \frac{2}{T} \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2} \cos \frac{\omega T}{2}}{\sin^2 \frac{\omega T}{2} + \cos^2 \frac{\omega T}{2} + \cos^2 \frac{\omega T}{2} - \sin^2 \frac{\omega T}{2}} = \frac{2}{T} \text{tg } \frac{\omega T}{2} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Protože pro malé úhly $\frac{\omega T}{2}$ platí $\text{tg } \frac{\omega T}{2} \cong \frac{\omega T}{2}$, pro dobrou frekvenční aproximaci můžeme zvolit periodu vzorkování T např. tak, aby $\frac{\omega_0 T}{2} \leq 1^\circ$.

3/ V pseudofrekvenční charakteristice navrhne k určenému $F_S(j\hat{\omega})$ korekční článek $F_K(j\hat{\omega})$, resp. $F_K(\hat{p})$ a jeho diskretní tvar určíme opět použitím lichoběžníkové aproximace

$$F_K(z) = F_K(\hat{p}) \text{ při } \hat{p} = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad (7.14)$$

Příklad 7.2:

Návrh diskretního derivačního korekčního článku dle požadované bezpečnosti ve fázi (viz příklad 7.1)

Upravme formulaci zadání: K systému $F_S(p) = \frac{1}{p^2}$ navrhnete diskretní derivační korekční článek $F_D(z)$ tak, aby

při $\omega_0 = 2 \text{ rad/sec}$. byla dosažena bezpečnost ve fázi $g = 45^\circ$!

Návrh diskrétního korekčního člunku ve frekvenční charakteristice spojitého systému

1/ V předchozím příkladu jsme navrhli spojitý derivační korekční člunek s přenosem:

$$F_D(p) = \frac{T_D p + 1}{\frac{T_D}{a} p + 1} = \frac{2.3983 p + 1}{0.3275 p + 1}$$

2/ Diskrétní přenos $F_D(z)$ určíme použitím lichoběžníkové aproximace (Matlab: `c2d(sys, T, 'tustin')`).

Podle doporučené volby periody vzorkování $w_{vz} = \frac{2p}{T} = (10 \div 20) w_0$ zvolíme $T = 0.5 \text{ sec}$.

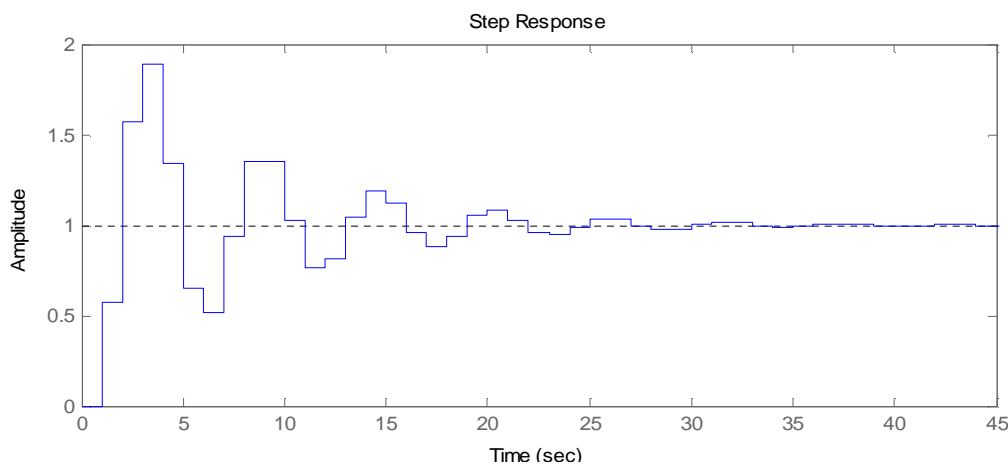
Přenos diskrétního derivačního korekčního člunku (`c2d(sys, T, 'tustin')`): $F_D(z) = \frac{4.586z - 3.72}{z - 0.1342}$

Pro účely simulace diskretizujeme i daný systém s tvarovačem (`c2d(sys, T, 'zoh')`): $F_S(z) = \frac{0.125z + 0.125}{z^2 - 2z + 1}$

Pro přenos otevřené regulační smyčky dostaneme: $F_0(z) = \frac{0.5733z^2 + 0.1083z - 0.465}{z^3 - 2.134z^2 + 1.268z - 0.1342}$

a pro přenos uzavřené regulační smyčky: $F_z(z) = \frac{0.5733z^2 + 0.1083z - 0.465}{z^3 - 1.561z^2 + 1.377z - 0.5992}$

Zjišťujeme ale, že skoková odezva se podstatně liší od odezvy spojitého regulačního obvodu:



Návrh diskrétního korekčního člunku s využitím pseudofrekvenční charakteristiky

Zvolíme nyní periodu vzorkování T tak, aby $\frac{w_0 T}{2} \leq 1^0$, přičemž požadujeme $w_0 = 2 \text{ rad} / \text{sec}$.

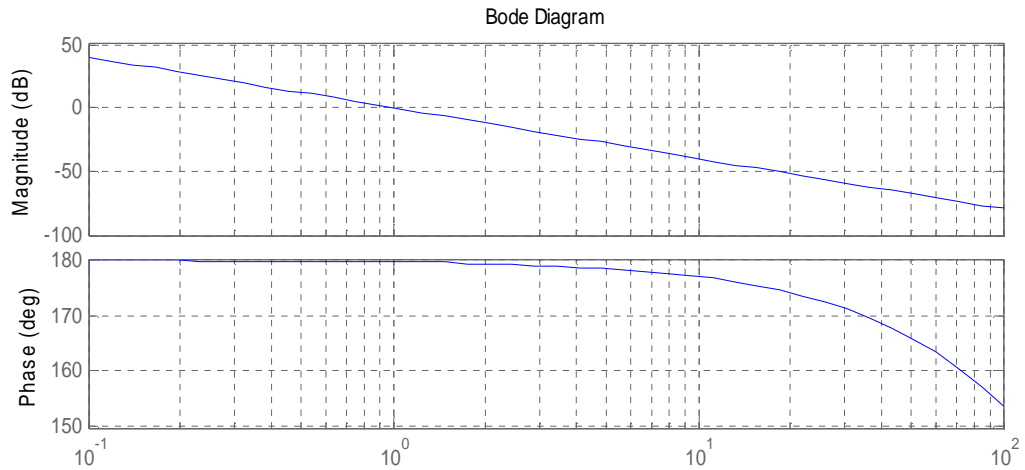
Protože 1 rad je přibližně 57^0 , zvolíme $T = 0.01 \text{ sec}$.

1/ Diskretizujeme daný systém s tvarovačem 0. řádu při $T = 0.01$: $F_S(z) = \frac{5e - 005z + 5e - 005}{z^2 - 2z + 1}$

2/ K přenosu $F_S(z)$ určíme „pseudofrekvenční přenos“ $F_S(j\hat{w})$ s použitím lichoběžníkové aproximace

$$F_S(\hat{p}) = F_S(z) \text{ (Matlab: } d2c(\text{sysd}, T, \text{'tustin'}) \text{): } F_S(\hat{p}) = \frac{-0.005\hat{p} + 1}{\hat{p}^2}$$

3/ Z Bodeho charakteristiky vidíme (viz následující graf), že v okolí $w_0 = 1 \text{ rad} / \text{sec}$ je aproximace frekvenční charakteristiky daného systému pseudofrekvenční charakteristikou zcela vyhovující a návrh derivačního člunku by probíhal shodně jako ve skutečných frekvenčních charakteristikách.



Můžeme tedy použít přenos již navrženého spojitého derivačního članku

$$F_D(\hat{p}) = F_D(p) = \frac{T_D p + 1}{\frac{T_D}{a} p + 1} = \frac{2.3983p + 1}{0.3275p + 1}$$

4/ Diskrétní tvar derivačního članku $F_D(z)$ určíme opět použitím lichoběžníkové aproximace

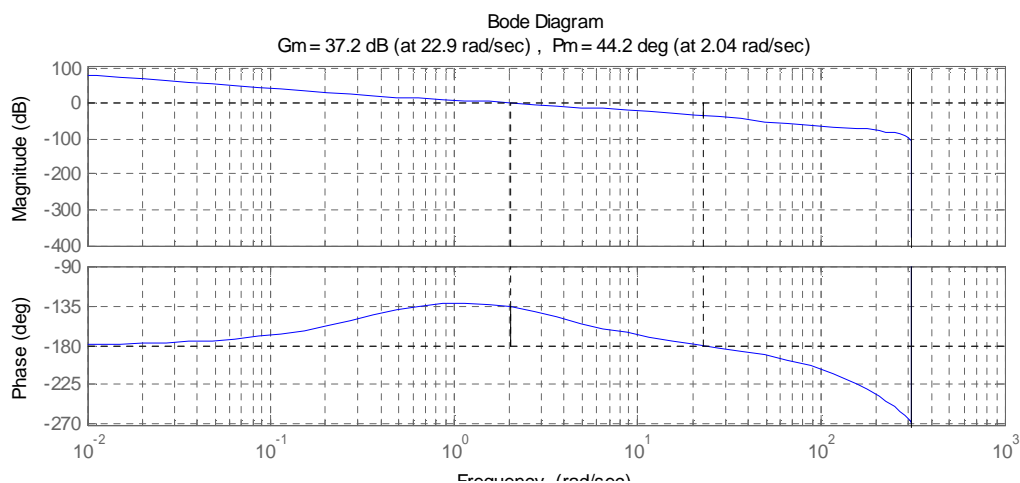
$$\text{(Matlab: c2d(sys,T,'tustin')): } F_D(z) = \frac{7.228z - 7.198}{z - 0.9699}$$

Kontrola:

$$\text{Diskrétní přenos otevřené smyčky: } F_o(z) = \frac{0.0003614z^2 + 1.5e - 006z - 0.0003599}{z^3 - 2.97z^2 + 2.94z - 0.9699}$$

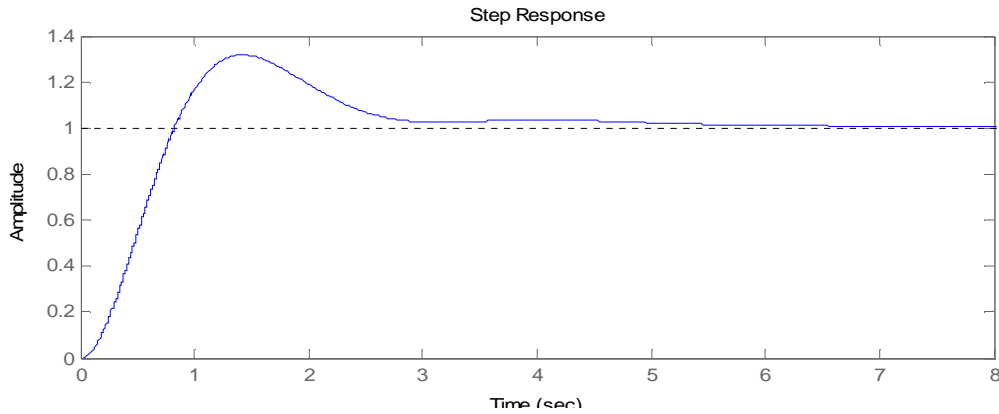
$$\text{Spojitý přenos po Tustinově transformaci: } F_o(\hat{p}) = \frac{-0.03662\hat{p}^2 + 7.308\hat{p} + 3.046}{\hat{p}^3 + 3.056\hat{p}^2 - 1.01e - 011\hat{p} - 1.603e - 010}$$

Bodeho charakteristiky (Matlab: margin) pro odpovídající pseudofrekvenční přenos $F_o(j\hat{\omega})$:



$$\text{Diskrétní přenos uzavřené regulační smyčky: } F_z(z) = \frac{0.0003614z^2 + 1.5e - 006z - 0.0003599}{z^3 - 2.97z^2 + 2.94z - 0.9703}$$

Skoková odezva uzavřené smyčky se již shoduje se skokovou odezvou spojitého systému:



Z příkladu vyplývá, že návrh diskrétního korekčního článku lze provést ve frekvenčních charakteristikách spojitého systému, ale volba periody vzorkování by měla respektovat podmínku $\frac{w_0 T}{2} \leq 1^0$.

7.3. Přesnost regulace

Přesností regulace rozumíme chování regulační odchylky $e(t)$ v ustáleném stavu .

Budeme uvažovat regulační obvod s regulátorem 1DoF dle schéma uvedeného na začátku této kapitoly a rozlišíme dva případy:

a/ přenos otevřené regulační smyčky $F_o(p)$ resp. $F_o(z)$ nemá astatismus

$$F_o(p) = F_S(p)F_R(p) = \frac{b_o(p)}{a_o(p)}, a_o(0) \neq 0 \quad \text{resp.} \quad F_o(z) = F_S(z)F_R(z) = \frac{b_o(z)}{a_o(z)}, a_o(1) \neq 0 \quad (7.15)$$

b/ přenos otevřené regulační smyčky $F_o(p)$ resp. $F_o(z)$ má astatismus k -tého stupně

$$F_o(p) = \frac{b_o(p)}{p^k \bar{a}_o(p)}, \bar{a}_o(0) \neq 0 \quad \text{resp.} \quad F_o(z) = \frac{b_o(z)}{(z-1)^k \bar{a}_o(z)}, \bar{a}_o(1) \neq 0 \quad (7.16)$$

V uzavřené regulační smyčce pro regulační odchylku $e(t)$ v ustáleném stavu platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + F_o(p)} W(p) \quad (7.17)$$

$$\text{a pro diskrétní verzi} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + F_o(z)} W(z) \quad (7.18)$$

Z uvedených výrazů usuzujeme, že **přesnost regulace bude záviset na typu referenčního signálu $w(t)$ a na stupni astatismu přenosu otevřené regulační smyčky $F_o(p)$.**

Nechť spojitý referenční signál $w(t)$ je reprezentován polynomem l -tého stupně

$$w(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_l t^l \quad \Rightarrow \quad W(p) = \frac{0!c_0}{p} + \frac{1!c_1}{p^2} + \frac{2!c_2}{p^3} + \dots + \frac{l!c_l}{p^{l+1}} = \frac{c(p)}{p^{l+1}} \quad (7.19)$$

kde c_i jsou známé konstanty a $c(p) = c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \dots + l!c_l$ je známý polynom stupně l .

Limitní chování regulační odchylky určíme pro oba případy dosazením za $W(p)$ do (7.17):

a/ $F_o(p)$ bez astatismu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{b_o(p)}{a_o(p)}} \frac{c(p)}{p^{l+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a_o(p)}{a_o(p) + b_o(p)} \frac{c(p)}{p^l} \neq 0 \quad (7.20)$$

a nelze tedy docílit v ustáleném stavu nulovou regulační odchylku.

b/ $F_o(p)$ s astatismem k -tého stupně

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{b_o(p)}{p^k \bar{a}_o(p)}} \frac{c(p)}{p^{l+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^k \bar{a}_o(p)}{p^k \bar{a}_o(p) + b_o(p)} \frac{c(p)}{p^l} = \dots \quad (7.21)$$

Pro $k > l$ je $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ a v ustáleném stavu je regulační odchylka nulová a regulace je přesná.

Pro $k \leq l$ je $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \neq 0$ a v ustáleném stavu vzniká trvalá regulační odchylka.

Poznámka 7.3.

V případě regulace skokové odezvy je $w(t) = 1[t]$ a $W(p) = \frac{1}{p}$.

Z předchozího vyplývá, že nulovou regulační odchylku v ustáleném stavu docílíme již pro $F_o(p)$ s astatismem prvního stupně (pokud nemá astatismus řízený systém, musí jej mít regulátor).

Pokud při regulaci na konstantní hodnotu má $F_o(p)$ astatismus druhého stupně, bude samozřejmě platit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \text{ a navíc také } \int_0^{\infty} e(t) dt = 0 \text{ (stupeň astatismu je dán počtem integrátorů v } F_o(p) \text{).}$$

Integrální omezení na regulační odchylku říká, že celková plocha vymezená průběhem odchylky $e(t) = 1[t] - y(t)$ musí být nulová, tzn., že regulační průběh musí být kmitavý a regulovaný výstup $y(t)$ bude nutně vykazovat přeregulování bez ohledu na to, jaký dynamický 1DoF regulátor bude použit!!

Není tedy možné, např. pro systém s přenosem $F_s(p) = \frac{1}{p^2}$, navrhnout 1DoF regulátor takový, že

uzavřená regulační smyčka bude mít stabilní nekmitavou odezvu.

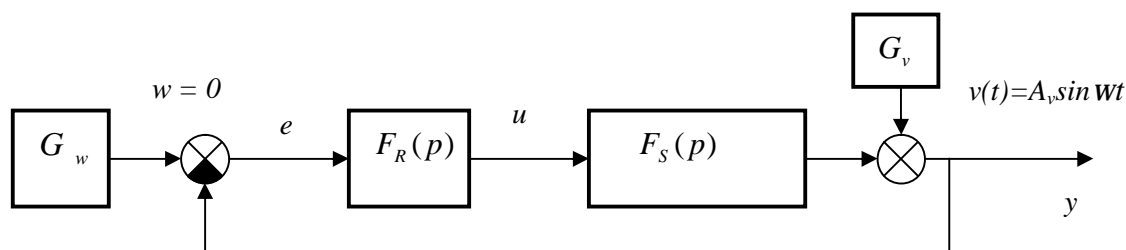
Podobně bychom mohli odvodit návrhová omezení pro referenční signál typu rampová funkce a pod. V praxi se však obvykle neseťkáme se stupněm astatismu $k > 2$ (bezpečnost ve fázi!).

Poznámka 7.4.

Jiná interpretace: při regulaci na konstantní hodnotu jsme nulovou regulační odchylku v ustáleném stavu docílili tím, že do přenosu otevřené regulační smyčky byl zahrnut i model generátoru referenčního signálu $W(p) = 1/p$. Jedná se o elementární příklad „principu vnitřního modelu“, který bude analyzován v 9. kapitole při návrhu regulátorů a kompenzaci poruch.

7.4. Dynamický činitel regulace

Zavádíme jej pro vyjádření míry potlačení harmonické poruchy působící na regulovaný výstup systému v uzavřené regulační smyčce.



Předpokládejme, že v uzavřené regulační smyčce působí na regulovaný výstup pouze harmonická porucha $v(t) = A_v \sin \omega t$, která na výstupu způsobí odezvu $y(t) = A_y \sin(\omega t + j)$.

$$\text{Pro Fourierův obraz odezvy platí } Y(j\omega) = \frac{1}{1 + F_o(j\omega)} V(j\omega).$$

Za dynamický činitel regulace budeme považovat poměr amplitud regulované veličiny a harmonické poruchy:

$$\frac{A_y}{A_v} = \frac{|Y(j\omega)|}{|V(j\omega)|} = \left| \frac{1}{1 + F_o(j\omega)} \right| = |S(j\omega)|, \text{ kde } S(j\omega) = \frac{1}{1 + F_o(j\omega)} \text{ je „citlivostní funkce“} \quad (7.22)$$

Platí tedy $A_y = |S(j\omega)|A_v$ a ideálním požadavkem by bylo $|S(j\omega)| = 0, \forall \omega$.

To splnit nelze, ale lze klást požadavky na průběh amplitudového zesílení citlivostní funkce $S(j\omega)$. Omezíme-li se na striktně ryzí přenos $F_o(j\omega)$, tj. $\text{st } b_o(j\omega) < \text{st } a_o(j\omega)$, průběh $|S(j\omega)|$ závisí na tom, má-li přenos otevřené regulační smyčky $F_o(j\omega)$ astatismus nebo ne.

Pro $F_o(j\omega)$ bez astatismu:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + F_o(j\omega)|} = \frac{1}{\left| 1 + \frac{b_o(j\omega)}{a_o(j\omega)} \right|} \Rightarrow 0 < |S(j0)| < 1 \quad \text{a} \quad |S(j\infty)| = 1 \quad (7.23)$$

Pro $F_o(j\omega)$ s astatismem k -tého stupně:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + F_o(j\omega)|} = \frac{1}{\left| 1 + \frac{b_o(j\omega)}{(j\omega)^k \bar{a}_o(j\omega)} \right|} \Rightarrow |S(j0)| = 0 \quad \text{a} \quad |S(j\infty)| = 1 \quad (7.24)$$

Typický průběh $|S(j\omega)|_{dB} = 20 \log |S(j\omega)|$ ukážeme na jednoduchém příkladu:

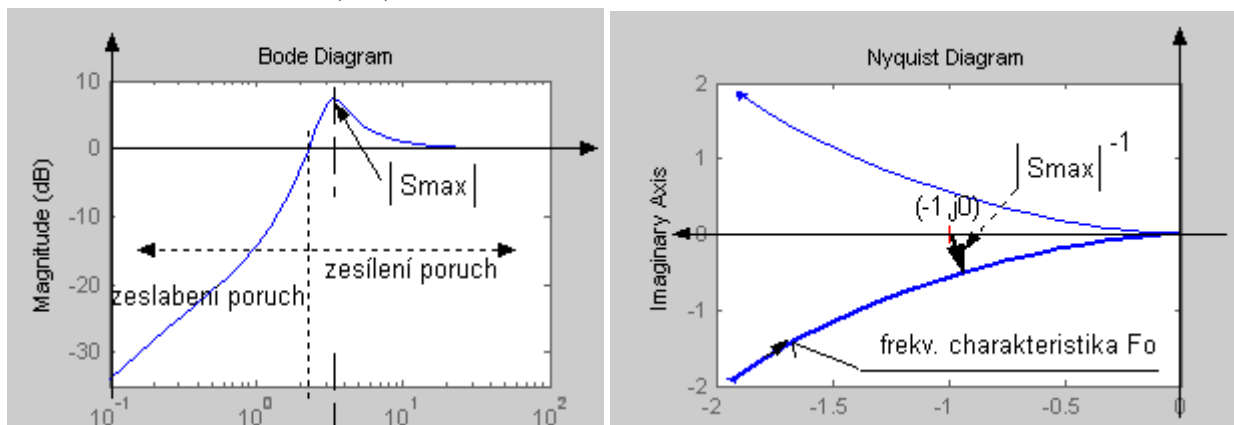
Příklad 7.3:

Systém s přenosem $F_S(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$ je řízen PI regulátorem s přenosem $F_R(p) = 10 \frac{p+0.5}{p}$.

Zakreslete průběh citlivostní funkce $|S(j\omega)|_{dB}$ a určete frekvenční oblasti pro zeslabení a zesílení poruch.

Přenos otevřené regulační smyčky je $F_o(p) = \frac{10p+5}{p(p+1)^2}$, $S(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{p^3 + 2p^2 + 11p + 5}$.

Na následujících grafech je znázorněna Bodeho charakteristika pro citlivostní funkci $|S(j\omega)|_{dB}$ a Nyquistova frekvenční charakteristika $F_o(j\omega)$ otevřeného regulačního obvodu:



Z Bodeho charakteristiky $|S(j\omega)|_{dB}$ vyplývá, že amplitudy harmonických poruch s frekvencí do $\omega \cong 2 \text{ rad/sec}$ budou v uzavřeném regulačním obvodu zeslabovány a amplitudy poruch s vyšší frekvencí zesilovány.

Z grafu lze přibližně odečíst maximální hodnotu citlivostní funkce $|S_{\max}|_{dB} = |S(j\omega_{S_{\max}})|_{dB} = 7 \text{ dB}$ pro harmonickou poruchu s frekvencí $\omega_{S_{\max}} = 3 \text{ rad/sec}$ (to je více než dvojnásobné zesílení její amplitudy!).

Všimněme si ještě souvislosti maximální hodnoty citlivostní funkce s průběhem frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu.

Protože $|S_{\max}| = |S(j\omega_{S_{\max}})| = \frac{1}{|1 + F_o(j\omega_{S_{\max}})|} = |1 + F_o(j\omega_{S_{\max}})|^{-1}$, lze v Nyquistově diagramu určit

maximální hodnotu citlivostní funkce jako převrácenou hodnotu minimální vzdálenosti $F_o(j\omega)$ od kritického bodu $(-1, j0)$. Tuto skutečnost lze také graficky znázornit zakreslením kružnice se středem v kritickém bodě $(-1, j0)$ a s minimálním poloměrem takovým, že se dotkne křivky $F_o(j\omega)$ právě v bodě $\omega = \omega_{S_{\max}}$.

Je zřejmé, že změnou nastavení parametrů regulátoru musí dojít ke změně přenosu uzavřené regulační smyčky, a tedy i ke změně kvality regulace a také k posunu frekvenčních pásem pro zeslabení a zesílení poruch buď do oblasti vyšších či nižších frekvencí.

Zjistíme však, že **zeslabení poruchy na nízkých frekvencích bude mít vždy za následek její zesílení na vysokých frekvencích a naopak (t. zv. „efekt vodní postele“)**.

Jedná se tedy o velmi důležité omezení, které je nutno respektovat při návrhu regulátorů.

Matematicky byla tato omezení formulována a dokázána v podobě několika integrálních formulí (Bode, Horowitz, Freudenberg, Goodwin aj.), které se liší předpoklady o stabilitě či o minimální fázovosti systému, ale všechny vedou v podstatě ke stejnému závěru:

Součet ploch vymezených křivkou $\ln|S(j\omega)|$ nad a pod osou 0dB při $\omega \in [0, \infty)$ je konstantní.

Uvedeme pouze nejjednodušší variantu Bodeho integrální formule:

| Jestliže platí pro | Spojité systémy | Diskrétní systémy |
|--------------------|---|---|
| | 1/ $F_S(p), F_R(p)$ jsou stabilní | 1/ $F_S(z), F_R(z)$ jsou stabilní |
| | 2/ relativní řád $F_o(p) \geq 2$ | 2/ relativní řád $F_o(z) \geq 1$ |
| | 3/ uzavřený systém je stabilní | 3/ uzavřený systém je stabilní |
| potom | $\int_0^{\infty} \ln S(j\omega) d\omega = 0$ | $\int_0^{p/T} \ln S(e^{j\omega T}) d\omega = 0$ (7.25) |

Při návrhu regulátorů může být požadavek na potlačení nf. poruch vyjádřen např. požadavkem na procentuální potlačení amplitudy poruchy o známé frekvenci nebo obecným požadavkem:

„maximálně potlačit poruchy na nízkých frekvencích a na žádné jiné frekvenci je příliš nezvětšit“.

Klademe tak určité požadavky na průběh $|S(j\omega)|$.

Za rozumné požadavky na průběh $|S(j\omega)|$ považujeme:

1/ $|S(j0)| = 0 \dots$ nulový přenos na výstup pro stejnosměrný signál (to zaručí astatismus $F_o(j\omega)$).

2/ $\frac{d^k}{d\omega^k} |S(j\omega)|_{\omega=0} = konst. \neq 0 \rightarrow \min$; $k = 1, 2, \dots$

První nenulovou derivaci $|S(j\omega)|$ v počátečním bodě $\omega = 0$, tj. směrnici tečny udávající sklon náběhu $|S(j\omega)|_{\omega=0}$, lze minimalizovat nastavením parametrů regulátoru a frekvenční pásmo, kde jsou poruchy zesilovány se snažíme přesunout do pásma, kde již budou potlačeny.

Možnost ovlivnění sklonu náběhu $|S(j\omega)|_{\omega=0}$ ukážeme na příkladu přenosu otevřené regulační smyčky s astatismem 1. stupně $F_o(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \bar{F}_o(j\omega)$. ($\bar{F}_o(j\omega)$ již astatismus nemá!)

Označíme $\bar{F}_o(j\omega) = \text{Re } \bar{F}_o(j\omega) + j \text{Im } \bar{F}_o(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) \Rightarrow |\bar{F}_o(j\omega)| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Pro citlivostní funkci dostáváme

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega} \bar{F}_o(j\omega)} = \frac{j\omega}{u + j(\omega + v)} \Rightarrow |S(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{[u^2 + (\omega + v)^2]}}$$

a pro sklon náběhu

$$\frac{d}{d\omega} |S(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{\sqrt{[u^2 + (\omega + v)^2]} - \omega \frac{d}{d\omega} \sqrt{[u^2 + (\omega + v)^2]}}{u^2 + (\omega + v)^2} \Big|_{\omega=0} = \frac{\sqrt{[u^2(0) + v^2(0)]}}{u^2(0) + v^2(0)} = \frac{1}{|\bar{F}_o(0)|} \quad (7.26)$$

Obecně nemusí být první derivace nenulová a je nutné provést další derivace:

$$\frac{d^k}{d\omega^k} |S(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{k!}{|\bar{F}_o(0)|} \rightarrow \min \quad (7.27)$$

Protože $|\bar{F}_o(0)|$ závisí na parametrech regulátoru, lze sklon náběhu $|S(j\omega)|_{\omega=0}$ změnou parametrů žadoucím způsobem měnit.

Příklad 7.4:

Uvažujte systém řízený PI regulátorem z *Příkladu 7.3*. Ilustrujte ovlivnění průběhu citlivostní funkce $|S(j\omega)|_{dB}$ změnou integrační časové konstanty PI regulátoru! Uvažujte 3 volby: $T_i = 1, 2$ a 5 sec. !

$$1/ \quad F_S(p) = \frac{1}{(p+1)^2}, \quad F_{R1}(p) = K \frac{\left(p + \frac{1}{T_i}\right)}{p} = 10 \frac{p+1}{p}, \quad F_{o1}(p) = \frac{10p+10}{p(p+1)^2}$$

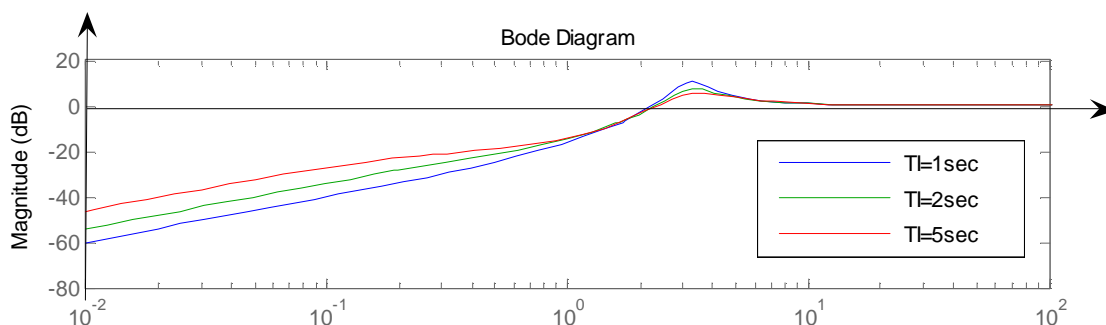
$$S_1(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{p^3 + 2p^2 + 11p + 10}, \quad \text{sklon náběhu je } \frac{d^k}{d\omega^k} |S_1(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{k!}{|\bar{F}_{o1}(0)|} = \frac{1}{10}$$

$$2/ \quad F_S(p) = \frac{1}{(p+1)^2}, \quad F_{R2}(p) = K \frac{\left(p + \frac{1}{T_i}\right)}{p} = 10 \frac{p+0.5}{p}, \quad F_{o2}(p) = \frac{10p+5}{p(p+1)^2}$$

$$S_2(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{p^3 + 2p^2 + 11p + 5}, \quad \text{sklon náběhu je } \frac{d^k}{d\omega^k} |S_2(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{k!}{|\bar{F}_{o2}(0)|} = \frac{1}{5}$$

$$3/ \quad F_S(p) = \frac{1}{(p+1)^2}, \quad F_{R3}(p) = K \frac{\left(p + \frac{1}{T_i}\right)}{p} = 10 \frac{p+0.2}{p}, \quad F_{o3}(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)^2}$$

$$S_3(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{p^3 + 2p^2 + 11p + 2}, \quad \text{sklon náběhu je } \frac{d^k}{d\omega^k} |S_3(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{k!}{|\bar{F}_{o3}(0)|} = \frac{1}{2}$$



7.5. Kmitavost uzavřené regulační smyčky

Uzavřená regulační smyčka s přenosem $F_{y,w}(j\omega)$ je náchylná ke kmitání na rezonanční frekvenci ω_r . Nastává tzv. **rezonanční převýšení**, které charakterizujeme číslem kmitavosti M . Pro návrh regulátorů jsou tedy ω_r a číslo kmitavosti M důležité návrhové parametry.

Definice čísla kmitavosti M pro spojitě a diskrétní systémy:

$$M = \max_{\omega \in (0, \infty)} \frac{|F_{y,w}(j\omega)|}{|F_{y,w}(j0)|}, \quad M = \max_{\omega \in (0, p/T)} \frac{|F_{y,w}(e^{j\omega T})|}{|F_{y,w}(e^{j\omega T})|_{\omega=0}}, \quad \text{kde } F_{y,w}(j\omega) = \frac{F_o(j\omega)}{1 + F_o(j\omega)} \quad (7.28)$$

V případě, že spojitý $F_o(j\omega)$ má astatismus k -tého stupně (viz (7.16)), má $|F_{y,w}(j\omega)|$ tvar

$$|F_{y,w}(j\omega)| = \frac{|F_o(j\omega)|}{|1 + F_o(j\omega)|} = \frac{\left| \frac{b_o(j\omega)}{(j\omega)^k \bar{a}_o(j\omega)} \right|}{\left| 1 + \frac{b_o(j\omega)}{(j\omega)^k \bar{a}_o(j\omega)} \right|} = \left| \frac{b_o(j\omega)}{(j\omega)^k \bar{a}_o(j\omega) + b_o(j\omega)} \right| \quad (7.29)$$

a pro $\omega = 0$ dostaneme $|F_{y,w}(j0)| = 1$.

Pro diskrétní systémy s astatismem k -tého stupně platí $a_o(z) = (z-1)^k \bar{a}_o(z)$, $z = e^{j\omega T}$

a pro $\omega = 0$ dostáváme $|F_{y,w}(e^{j\omega T})|_{\omega=0} = 1$.

Definici čísla kmitavosti M pro spojitě a diskrétní systémy s astatismem lze zjednodušit:

$$M = \max_{\omega \in (0, \infty)} |F_{y,w}(j\omega)|, \quad M = \max_{\omega \in (0, p/T)} |F_{y,w}(e^{j\omega T})| \quad (7.30)$$

Pro přenosovou funkci uzavřeného regulačního obvodu $F_{y,w}(j\omega)$ se používá název

komplementární citlivostní funkce $Q(j\omega)$, $Q(j\omega) \equiv F_{y,w}(j\omega) = \frac{F_o(j\omega)}{1 + F_o(j\omega)}$.

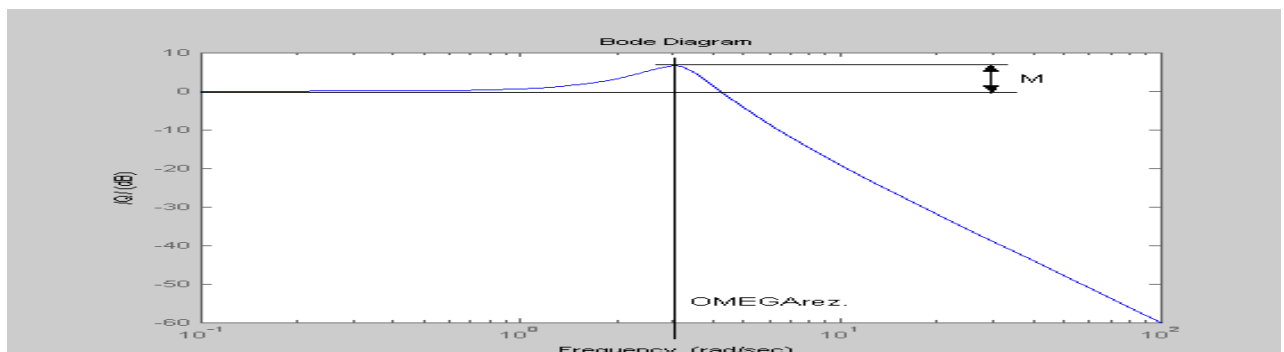
Její název je vztažen k již definované **citlivostní funkci** $S(j\omega) \equiv F_{y,v}(j\omega) = \frac{1}{1 + F_o(j\omega)}$.

Pro dosažitelnou kvalitu regulace a potlačení poruch platí základní omezující vztah:

$$S(j\omega) + Q(j\omega) = \frac{1}{1 + F_o(j\omega)} + \frac{F_o(j\omega)}{1 + F_o(j\omega)} = 1 \quad \forall \omega \quad (7.31)$$

Typický průběh $|Q(j\omega)|_{dB}$ pro systém a regulátor z Příkladu 7.3. znázorňuje následující graf.

K přenosu $F_o(j\omega) = \frac{10p+5}{p(p+1)^2}$ určíme $Q(j\omega) \equiv F_{y,w}(j\omega) = \frac{10p+5}{p^3+2p^2+11p+5}$ a $|Q(j\omega)|_{dB}$:



Rezonanční frekvenci w_r a rezonanční převýšení M resp. M [dB] lze sice zjistit z průběhu funkce $|F_{y,w}(jw)|$ resp. $|F_{y,w}(jw)|_{dB}$, ale pro návrh regulátorů je důležité, aby návrhové parametry w_r, M byly uvedeny do souvislosti s průběhem frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky $F_o(jw)$.

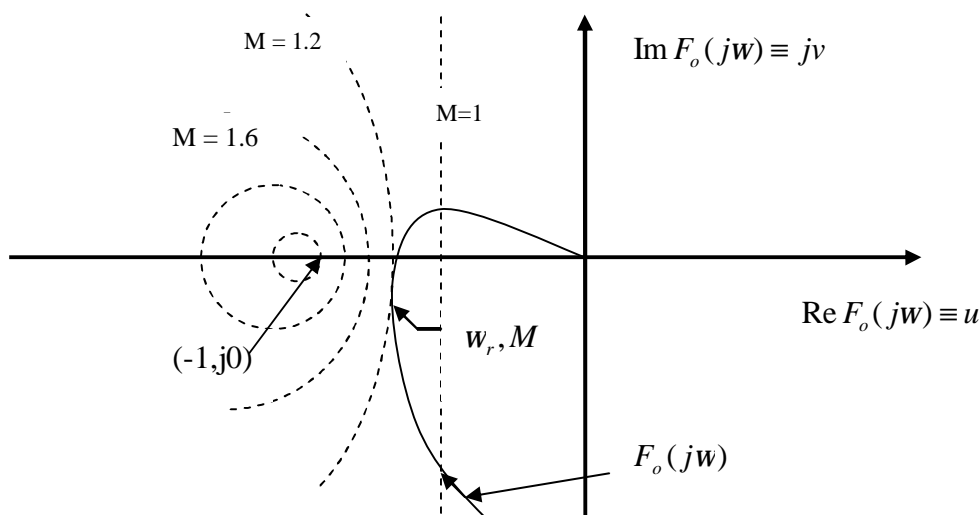
Určeme v komplexní rovině otevřené regulační smyčky ($\text{Re } F_o(jw), j \text{Im } F_o(jw)$) geometrické místo bodů frekvenční charakteristiky uzavřené regulační smyčky s konstantní amplitudou $|F_{y,w}(jw)| = M$.

Označíme-li body frekvenční charakteristiky otevřené smyčky $F_o(jw) = u + jv$, potom geometrické místo bodů frekvenční charakteristiky uzavřené regulační smyčky s konstantní amplitudou $|F_{y,w}(jw)| = M$ vyhovuje rovnici

$$|F_{y,w}(jw)| = \frac{|F_o(jw)|}{|1 + F_o(jw)|} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{(1+u)^2 + v^2}} = M = \text{konst.} \quad (7.32)$$

Po úpravě zjistíme, že hledané křivky tvoří soustavu tzv. **M-kružnic**, jejichž střed a poloměr je parametrizován číslem kmitavosti M

$$\left(u - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2}\right)^2 \quad (7.33)$$



Na obrázku je naznačena soustava M -kružnic pro $M > 1$ spolu s průběhem frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky $F_o(jw)$. Ze (7.32) také zjistíme, že pro $M = 1$ kružnice degeneruje v přímku, protínající zápornou reálnou poloosu v bodě $(-1/2, j0)$.

První bod dotyku $F_o(jw)$ s kružnicí $M = \text{konst.}$ určuje rezonanční frekvenci w_r a rezonanční převýšení M . Protože změnou parametrů regulátoru lze ovlivnit průběh $F_o(jw)$, je principiálně možné určit parametry regulátoru tak, aby bylo dosaženo akceptovatelného rezonančního převýšení (obvykle $M = 1.2 \div 1.5$) při požadovaném „umístění“ rezonanční frekvence w_r .

Poznámka 7.5.

Soustavu M -kružnic, která je soustavou křivek konstantní amplitudy $|F_{y,w}(jw)|$, je možné doplnit soustavou křivek konstantní fáze j , $j = \arg F_{y,w}(jw) = \text{konst.}$

Tyto křivky jsou rovněž soustavou kružnic, které prochází body $(0, j0)$ a $(-1, j0)$ a mají střed na přímce paralelní s imaginární osou a procházející bodem $(-1/2, j0)$.

V logaritmických souřadnicích se křivky konstantní amplitudy a fáze využívají v podobě jejich superpozice na **Nicholsovy křivky** (závislost amplitudy na fázi ve frekvenčním přenosu otevřené regulační smyčky). Lze tak určit průběh frekvenčních charakteristik uzavřené regulační smyčky ze znalosti průběhu frekvenčních charakteristik otevřené regulační smyčky (Matlab: Nichols).

7.6. Citlivost uzavřené regulační smyčky na změnu parametrů řízeného systému

Uvažujme regulační obvod dle schéma uvedeného na začátku této kapitoly, kde v přenosu řízeného systému $F_S(j\omega, a)$ označuje a nominální hodnotu nějakého parametru.

Přenos uzavřené regulační smyčky je $F_{y,w}(j\omega, a) = \frac{F_S(j\omega, a)F_R(j\omega)}{1 + F_S(j\omega, a)F_R(j\omega)}$.

Označme Δa odchylku parametru systému od jeho nominální hodnoty a a analyzujme její vliv na změnu přenosové funkce uzavřené regulační smyčky $\Delta F_{y,w}(j\omega)$.

Pro tento účel zavedeme parametrickou citlivostní funkci S_a :

$$\begin{aligned} S_a(j\omega) &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{y,w}(j\omega) / F_{y,w}(j\omega)}{\Delta a / a} = \frac{a}{F_{y,w}(j\omega)} \frac{d}{da} F_{y,w}(j\omega) = \frac{a}{F_{y,w}(j\omega)} \frac{\partial F_{y,w}(j\omega)}{\partial F_S(j\omega, a)} \frac{d}{da} F_S(j\omega, a) = \\ &= \frac{1}{1 + F_o(j\omega)} \frac{a}{F_S(j\omega, a)} \frac{d}{da} F_S(j\omega, a) = S(j\omega) \frac{a}{F_S(j\omega, a)} \frac{d}{da} F_S(j\omega, a) \end{aligned} \quad (7.34)$$

Z uvedeného vztahu je zřejmé, že nemůžeme ovlivnit přenos řízeného systému ani jeho derivaci vzhledem ke změnám parametru a , a tak průběh funkce parametrické citlivosti $S_a(j\omega)$ je ovlivnitelný regulátorem prostřednictvím průběhu citlivostní funkce $S(j\omega)$ (viz 7.22.) a pro potlačení vlivu změn parametrů bude platit totéž, co pro potlačení nízkofrekvenčních poruch.

7.7. Tvarování frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky

Dosud analyzované požadavky na chování uzavřeného regulačního obvodu byly formulované ve frekvenční oblasti a všechny v podstatě kladou nějaké požadavky na průběh frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky $F_o(j\omega)$, ať již v komplexní rovině (Nyquist) či v logaritmických souřadnicích (Bode).

Shrneme-li tyto požadavky, dostaneme alespoň kvalitativní pohled na vhodné tvarování jejího průběhu pro dosažení požadovaného chování uzavřené regulační smyčky.

Požadavek na stabilitu a robustnost ve stabilitě

Souvisí s průběhem $F_o(j\omega)$ v pásmu „středních“ frekvencí (okolí frekvencí ω_0 a ω_{krit}), který je specifikován požadavky na bezpečnost ve fázi g a bezpečnost v zesílení $1/K_0$.

Pro jejich splnění je obvykle postačující, aby logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika otevřené regulační smyčky $|F_o(j\omega)|_{dB}$ přecházela osu 0dB se sklonem -20dB/dek. (viz návrh korekčních článků).

Požadavek na kmitavost uzavřené regulační smyčky

První bod dotyku $F_o(j\omega)$ s kružnicí $M = \text{konst.}$ určuje rezonanční frekvenci ω_r a rezonanční převýšení M . Změnou parametrů regulátoru lze ovlivnit průběh $F_o(j\omega)$ a docílit

akceptovatelného rezonančního převýšení $|F_{y,w}(j\omega)| = M$ (obvykle $M = 1.2 \div 1.5$) při požadovaném „umístění“ rezonanční frekvence ω_r .

Je nutné vzít do úvahy frekvenční pásmo působících poruch, aby nebyly v uzavřeném regulačním obvodu zesíleny!!

Požadavek na přesnost regulace

Týká se průběhu $F_o(j\omega)$ v oblasti nízkých frekvencí. V případě regulace na konstantní hodnotu je požadavek přesnosti regulace splněn zavedením astatismu 1. stupně, kterému odpovídá počáteční sklon -20dB/dek. u průběhu $|F_o(j\omega)|_{dB}$. Počáteční sklon větší než -40dB/dek. je však z hlediska návrhu regulačního obvodu problematický. Přechod mezi nízkofrekvenčním a středofrekvenčním pásmem se volí krátký, se sklonem -40dB/dek. (kvůli bezpečnosti ve fázi).

Požadavek na šířku pásma regulace

Obecně se snažíme docílit co největší šířku pásma (viz *Poznámka 7.2.*), z důvodů možnosti sledování rychlých změn referenčního signálu $w(t)$ regulovaným výstupem $y(t)$ a docílení krátké doby regulace T_{reg} . Je však nutno brát ohled na možné poruchy, jejichž frekvence se nachází v okolí rezonanční frekvence ω_r .

Zvětšení šířky pásma lze dosáhnout posunem frekvence ω_0 do oblasti vyšších frekvencí (viz návrh korekčních článků) a pokud není ohrožena bezpečnost ve fázi a zesílení, je tento posun možno realizovat i zvětšením zesílení v otevřené regulační smyčce.

Požadavek na potlačení amplitudy „nízkofrekvenčních“ poruch

Předpokládáme, že pro Fourierův obraz nízkofrekvenční poruchy $V(j\omega)$ platí:

$$|V(j\omega)| \gg 1 \text{ v oblasti nízkých frekvencí a } |V(j\omega)| \cong 0 \text{ v oblasti vysokých frekvencí.}$$

Požadujeme-li potlačení amplitudy nf. poruch na regulovaném výstupu, musí platit:

$$|Y(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + F_o(j\omega)} \right| |V(j\omega)| < 1 \Rightarrow |V(j\omega)| < |1 + F_o(j\omega)|$$

Protože v oblasti nízkých frekvencí přibližně platí $|1 + F_o(j\omega)| \cong |F_o(j\omega)|$, dostáváme podmínku pro průběh $|F_o(j\omega)|$ v oblasti nf.: $|F_o(j\omega)| > |V(j\omega)| \gg 1$ (7.35)

Zesílení $F_o(j\omega)$ musí být velké na těch frekvencích, kde $|V(j\omega)| \gg 1$. Jinak řečeno, pro tyto frekvence musí být amplituda citlivostní funkce $S(j\omega)$ malá: $|S(j\omega)| \ll 1$

Požadavek na potlačení amplitudy „vysokofrekvenčních“ poruch

Předpokládáme, že pro Fourierův obraz vysokofrekvenční poruchy $Z(j\omega)$ platí:

$$|Z(j\omega)| \gg 1 \text{ v oblasti vysokých frekvencí a } |Z(j\omega)| \cong 0 \text{ v oblasti nízkých frekvencí.}$$

Požadujeme-li potlačení amplitudy vf. poruch na regulovaném výstupu, musí platit:

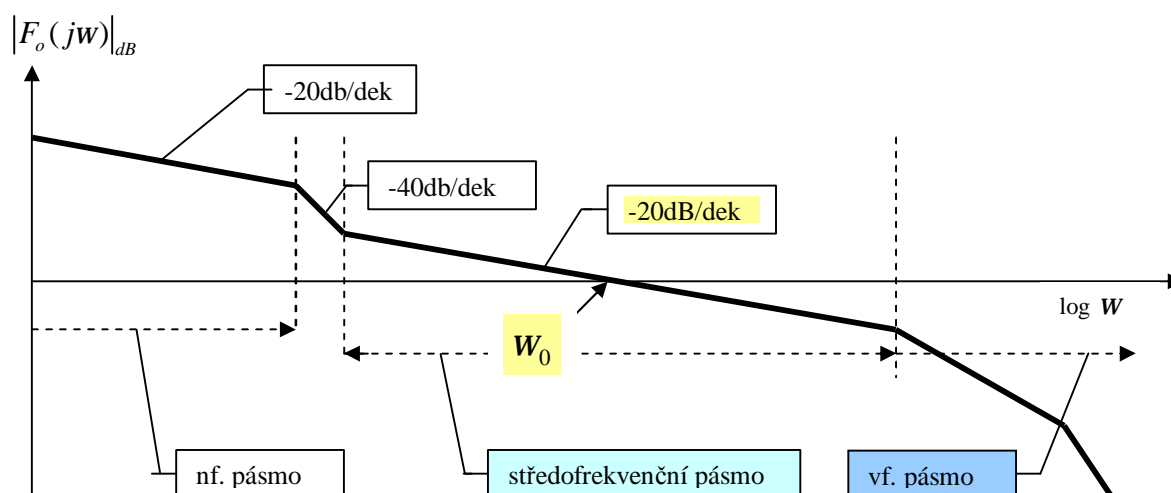
$$|Y(j\omega)| = \left| \frac{F_o(j\omega)}{1 + F_o(j\omega)} \right| |Z(j\omega)| < 1 \Rightarrow |F_o(j\omega)| |Z(j\omega)| < |1 + F_o(j\omega)|$$

Protože v oblasti vysokých frekvencí přibližně platí $|1 + F_o(j\omega)| \cong 1$,

dostáváme podmínku pro průběh $|F_o(j\omega)|$ v oblasti vf.: $|F_o(j\omega)| < |Z(j\omega)|^{-1} \ll 1$ (7.36)

Zesílení $F_o(j\omega)$ musí být malé na těch frekvencích, kde $|Z(j\omega)| \gg 1$. Jinak řečeno, pro tyto frekvence musí být amplituda komplementární citlivostní funkce $Q(j\omega)$ malá: $|Q(j\omega)| \ll 1$

Typický průběh přímkové aproximace $|F_o(j\omega)|_{dB}$ vzhledem k formulovaným požadavkům:



Tvarování Bodeho či Nyquistovy frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky $F_o(jw)$ lze provést návrhem regulátorů (kompenzátorů, korekčních článků) a s ohledem na jejich realizaci se naskytá otázka, zda lze ve frekvenční oblasti nalézt nějaký vztah mezi „vynaloženou energií“ na řízení systému v uzavřené regulační smyčce a průběhem frekvenční charakteristiky uzavřené regulační smyčky $F_{y,w}(jw)$ resp. komplementární citlivostní funkce $Q(jw)$.

Požadavek na vynaloženou energii řízení

Vydeme z předpokladu, že u fyzikálních soustav je vynaložená energie úměrná kvadrátu vstupní veličiny a využijeme *Parcevalova vztahu*, který pro *stabilní signály* uvádí do souvislosti časovou a frekvenční oblast:

$$E \approx \int_0^{\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} U(jw)U(-jw)dw = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} |U(jw)|^2 dw \quad (7.37)$$

Má-li být vynaložená energie malá, musí být malá i amplituda $|U(jw)|$.

V uzavřené regulační smyčce je $U(jw) = \frac{F_R(jw)}{1 + F_o(jw)} [W(jw) - Z(jw) - V(jw)]$ a pro amplitudu

$|U(jw)|$ lze s použitím komplementární citlivostní funkce $Q(jw) \equiv F_{y,w}(jw)$ odvodit

$$|U(jw)| = \frac{|Q(jw)|}{|F_s(jw)|} |[W(jw) - Z(jw) - V(jw)]| \quad (7.38)$$

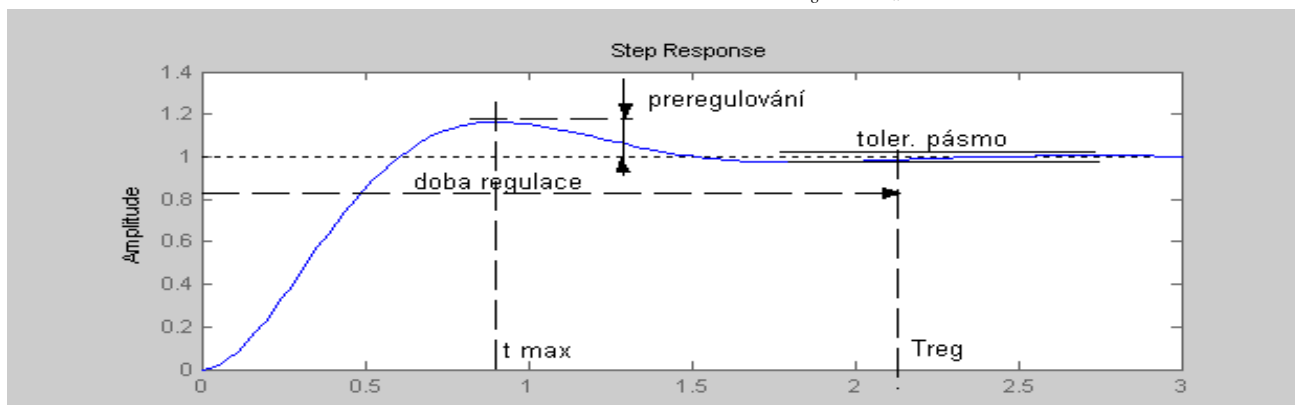
Z tohoto vztahu a z typického průběhu $|Q(jw)|$ (viz obr. za (7.31)) vyplývá, že vynaložená energie může být snížena, pokud $|Q(jw)|$ bude malá na těch frekvencích, kde $|F_s(jw)|$ je malá.

7.8. Požadavky na kvalitu regulace v časové oblasti

Ve 3. kapitole jsme ukázali na přechodové charakteristice kmitavého systému 2. řádu možnost Výběru parametrů pro kvalitativní hodnocení jeho dynamických vlastností (doba regulace T_{reg} , maximální relativní přeregulování s_{max} , čas maximálního přeregulování t_{max} , doba zdvihu a doba odezvy). Pro kmitavý systém 2. řádu je také poměrně snadné nalézt přibližné vztahy mezi těmito parametry a parametry systému x, w_n , které současně určují i umístění jeho pólů:

$$x \cong \left| \frac{(\ln s_{max})/p}{\sqrt{1 + (\ln s_{max})^2/p^2}} \right| ; w_n \cong \frac{(3), (4), (4.8)}{xT_{reg}} \quad (\text{pro toleranční pásmo } 5\%, 2\%, 1\%) \quad (7.39)$$

Protože přechodové jevy v uzavřené regulační smyčce často připomínají odezvu kmitavého členu 2. řádu, lze za určitých podmínek (dominantní komplexně sdružené póly v přenosu uzavřené smyčky) provést návrh regulátoru tak, aby umístění dominantních pólů odpovídalo požadovaným hodnotám parametrů hodnotících kvalitu regulace (obvykle T_{reg} a S_{max}).



Obvykle však hodnotíme průběh regulace integrálními (v diskrétním případě sumačními) kritérii kvality, která hodnotí časový průběh regulační odchylky $e(t) = w(t) - y(t)$. Používá se zejména

Kriterium ISE (Integral square error):
$$J(u) = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

Kriterium ITAE (Integral time absolute error):
$$J(u) = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (7.40)$$

a některé modifikace: $J(u) = \int_0^{\infty} [t^n e(t)]^2 dt$, $J(u) = \int_0^{\infty} [e^{at} e(t)]^2 dt$, $J(u) = \int_0^{\infty} [e^2(t) + ku^2(t)] dt$.

V integrálních kritériích kvality $J(u)$ označujeme, že hodnota kritéria závisí na řízení u , ovšem v klasické regulaci se předpokládá, že struktura regulátoru je volena předem (např. P, PI, PD, PID regulátor) a je tedy nutné určit pouze parametry zvolené struktury regulátoru tak, aby bylo minimalizováno kritérium kvality při stabilní uzavřené regulační smyčce.

Kritéria je tedy nutné vyjádřit jako funkce parametrů regulátoru a problém návrhu regulátoru je řešen jako *problém parametrické optimalizace za podmínky stability uzavřené regulační smyčky*.

Poznámka 7.6.:

Na rozdíl od klasické regulace, tzv. moderní teorie řízení řeší úlohy optimálního řízení bez nutnosti volby struktury regulátoru předem, úlohy optimálního řízení jsou z matematického hlediska formulovány a řešeny jako úlohy nalezení extrému nějakého funkcionálu za vedlejších podmínek daných rovnicemi systému. Výsledné řešení poskytne jak strukturu, tak i parametry regulátoru.

7.9. Požadavky na kvalitu regulace v algebraické oblasti

Požadavky na kvalitu regulace v algebraické oblasti by měly vyústit v *požadované umístění pólů (nul) uzavřené regulační smyčky*. Je-li specifikováno jejich požadované umístění, je návrh regulátorů v podstatě jednoduchou záležitostí. Problém je, že souvislost mezi požadavky a odpovídajícím umístěním pólů a nul je obecně obtížně zjistitelná.

Pro specifikaci požadovaného umístění nul a pólů lze využít následujících možností:

I/ Požadavky na umístění pólů uzavřené regulační smyčky lze odvodit z chování kmitavého systému 2.řádu (dominantní komplexně sdružené póly v přenosu uzavřené regulační smyčky).

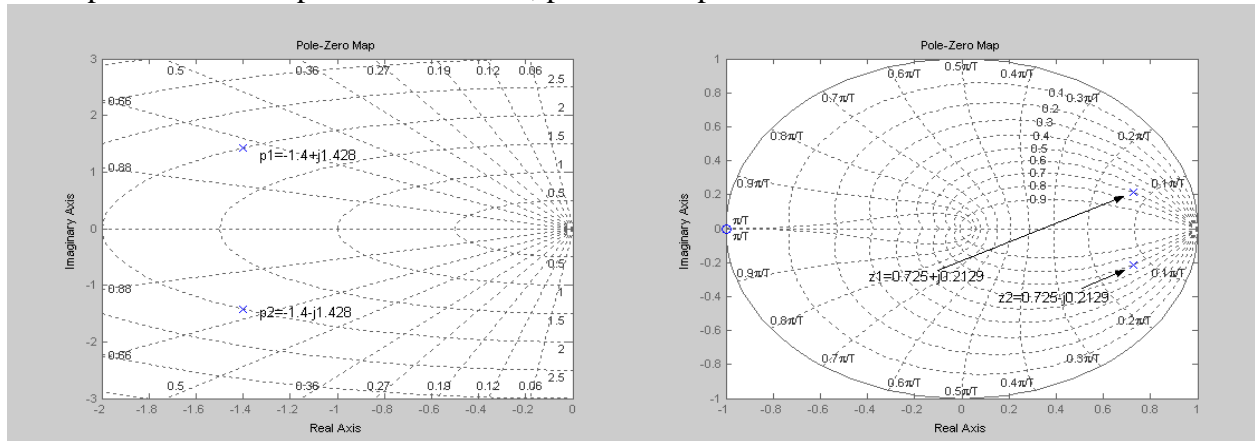
Specifikujeme-li požadavky na kvalitu regulace např. dobou regulace T_{reg} a maximálním přeregulováním S_{max} , lze použitím (7.39) určit činitel relativního tlumení x a netlumenou

frekvenci w_n , které určují požadované umístění pólů $p_{1,2} = -xw_n \pm jw_n\sqrt{1-x^2}$ a odpovídající spojitý přenos s jednotkovým zesílením $F(p) = \frac{w_n^2}{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}$.

Uvažujme např., že z požadavků na dobu regulace a maximální přeregulování bylo určeno $x = 0.7$ a $w_n = 2 \text{ rad/sec}$.

Odpovídající požadované rozložení pólů $p_{1,2} = -1.4 \pm j1.428$ v komplexní rovině p je zakresleno v levém grafu (jsou znázorněny i křivky $x, w_n = \text{konst.}$).

V pravém grafu je znázorněno odpovídající rozložení pólů $z_{1,2} = e^{p_{1,2}T} = 0.725 \pm j0.2129$ v komplexní rovině z pro diskrétní verzi, při zvolené periodě vzorkování $T = 0.2 \text{ sec}$.



- 2/ Požadavky na umístění pólů uzavřené regulační smyčky mohou být dány přímo požadovaným tvarem přenosu uzavřené regulační smyčky (viz návrh 2DoF regulátorů v 9. kapitole).
- 3/ Požadavky na umístění pólů uzavřené regulační smyčky jsou dány tzv. standardními tvary, které jsou tabelovány a specifikovány pro určitý typ přenosu a požadavků (Whiteley, Naslin). Patří sem i tabelované tvary charakteristických polynomů uzavřené regulační smyčky, získané z minimalizace kritéria ITAE (viz (7.40) a 9. kapitola).
- 4/ Požadované umístění pólů a nul uzavřené regulační smyčky může být odvozeno z návrhu frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky (zlomové frekvence). Je-li specifikováno rozložení nul a pólů otevřené smyčky, umístění pólů uzavřené smyčky zjistíme použitím metody geometrického místa kořenů.
- 5/ Požadované umístění pólů a nul uzavřené regulační smyčky může být určeno s použitím metod moderní teorie řízení. Navržený optimální regulátor implikuje optimální tvar uzavřeného regulačního obvodu s optimálním rozložením pólů a nul. Tohoto rozložení se můžeme pokusit dosáhnout regulátorem s předem danou strukturou.
- 6/ Požadované umístění pólů je jednoznačně dáno typem úlohy (viz řízení s konečným počtem kroků regulace (dead-beat control), kdy všechny póly diskrétního přenosu uzavřené regulační smyčky musí mít nulovou hodnotu).

Při návrhu regulátorů dle požadovaného umístění pólů existuje řada integrálních omezení na dosažitelnou kvalitu regulace. Dosažitelnou kvalitu (přeregulování, podregulování, doba regulace) obecně zhoršují nestabilní póly a/nebo nestabilní nuly řízeného systému - a to nehledě na typ použitého dynamického 1DoF regulátoru. Kvalita však také záleží na poloze pólů a nul řízeného systému vzhledem k požadovanému umístění pólů uzavřené regulační smyčky.

7.10. Integrální omezení a dosažitelná kvalita regulace

Omezení ve frekvenční oblasti:

A/ $Q(jw) + S(jw) = 1$, $\forall w$ (bodový charakter)

B/ $\int_0^{\infty} \ln |S(jw)| dw = 0$ (integrální omezení - Bodeho věta pro stabilní systémy a varianty pro nestabilní a neminimálně fázové systémy).

Omezení v časové oblasti:

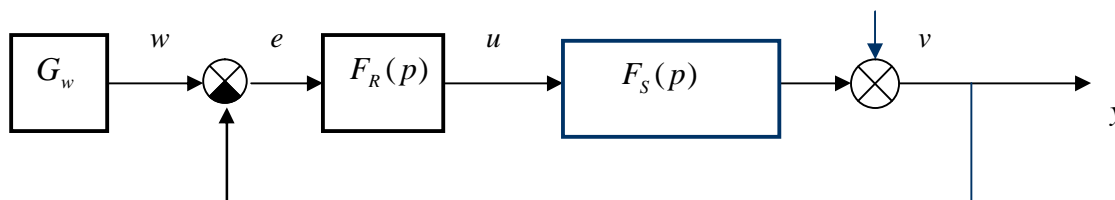
A/ Omezení, vyplývající ze stupně astatismu přenosu otevřené regulační smyčky $F_o(p)$ při regulaci na konstantní hodnotu ve stabilním regulačním obvodu:

- Nulovou regulační odchylku v ustáleném stavu docílíme pro $F_o(p)$ s astatismem prvního stupně (pokud nemá astatismus řízený systém, musí jej mít regulátor).
- Pokud při regulaci na konstantní hodnotu bude mít $F_o(p)$ astatismus druhého stupně (druhý stupeň astatismu způsobí anulaci integrálu regulační odchylky), bude platit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \text{a navíc} \quad \int_0^{\infty} e(t) dt = 0$$

Integrální omezení na regulační odchylku znamená, že celková plocha vymezená průběhem odchylky musí být nulová. Regulační průběh musí být tudíž kmitavý a regulovaný výstup bude vykazovat přeregulování, bez ohledu na to, jaký 1DoF regulátor bude použit!!

B/ Integrální omezení na dosažitelnou kvalitu regulace ve stabilním regulačním obvodu a jeho souvislost s rozložením nul a pólů řízeného systému.



Předpoklady:

- Řízený systém s přenosem $F_S(p)$ má stabilní či nestabilní póly a nuly v oblasti konvergence (pro jednoduchost budeme uvažovat pouze reálné nuly a póly).
- Přenos otevřené smyčky $F_o(p)$ je striktně ryzí a obsahuje astatismus 1. stupně.
- Regulátor 1DoF s přenosem $F_R(p)$ je navržen tak, aby uzavřený systém byl stabilní.
- Referenčním signálem je jednotkový skok $w(t) = 1[t]$, $W(p) = \frac{1}{p}$.
- Pro zaručení „vnitřní stability regulačního obvodu“ předpokládáme, že nestabilní nuly a póly systému nejsou kráceny s póly a nulami regulátoru. Nestabilní nuly a póly tak přecházejí do přenosu otevřené regulační smyčky.

Integrální omezení na dosažitelnou kvalitu regulace vyplývají:

- z existence Laplaceovy transformace časových funkcí $e(t)$, $y(t)$ a z určení jejich hodnot pro póly a nuly v oblasti konvergence
- z anulace příslušných polynomů v citlivostní a komplementární citlivostní funkci stabilními či nestabilními nulami a póly řízeného systému.

Připomeňme si definici Laplaceovy transformace:

Jestliže funkce $f(t)$ je jednoznačná a po úsecích hladká, $f(t) = 0$ pro $t < 0$

a $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-s_0 t} dt < \infty$ pro nějaké $s_0 > 0$, potom Laplaceova transformace $f(t)$,

formálně značená $F(p) = L\{f(t)\}$, je definována vztahem $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$, $p = s + jw$.

$F(p)$ existuje $\forall p$ taková, že $\text{Re } p > s_0$ (oblast konvergence).

Důsledek: Pro libovolné $p = p_0$ (pól) resp. $p = z_0$ (nula) z oblasti konvergence platí

$$F(p_0) = \lim_{p \rightarrow p_0} F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-p_0 t} dt \quad \text{resp.} \quad F(z_0) = \lim_{p \rightarrow z_0} F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-z_0 t} dt \quad (7.41)$$

Jako motivující příklad uvažujme signál (časový originál): $y(t) = e^{2t}$

Časový originál vyhovuje podmínce: $\int_0^{\infty} |y(t)| e^{-s_0 t} dt < \infty$, $\forall s_0$, $s_0 > 2$

Laplaceův obraz: $Y(p) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{2t} e^{-pt} dt = \frac{1}{p-2}$, $p = s + jw$.

Obraz $Y(p)$ existuje $\forall p$: $\text{Re}\{p\} = s \geq s_0$ (oblast konvergence).

Např. pro $\text{Re}\{p\} \equiv s = 3 \geq s_0$ platí

$$Y(3) = \lim_{p \rightarrow 3} Y(p) = \lim_{p \rightarrow 3} \frac{1}{p-2} = 1$$

$$\text{resp.} \quad Y(3) = \lim_{p \rightarrow 3} Y(p) = \lim_{p \rightarrow 3} \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{2t} e^{-3t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -\left[e^{-t} \right]_0^{\infty} = 1$$

Ve stabilní uzavřené regulační smyčce budou stabilní průběhy regulační odchylky $e(t)$ i regulovaného výstupu $y(t)$.

Pro obraz regulační odchylky $E(p)$ a regulovaného výstupu $Y(p)$ platí

$$E(p) = \frac{1}{1 + F_o(p)} W(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{r_i}{p - p_i}, \quad Y(p) = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)} W(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\bar{r}_i}{p - p_i}$$

Časový průběh těchto veličin lze vypočítat ze vztahů

$$e(t) = \sum_i^{n+1} r_i e^{p_i t}, \quad y(t) = \sum_i^{n+1} \bar{r}_i e^{p_i t},$$

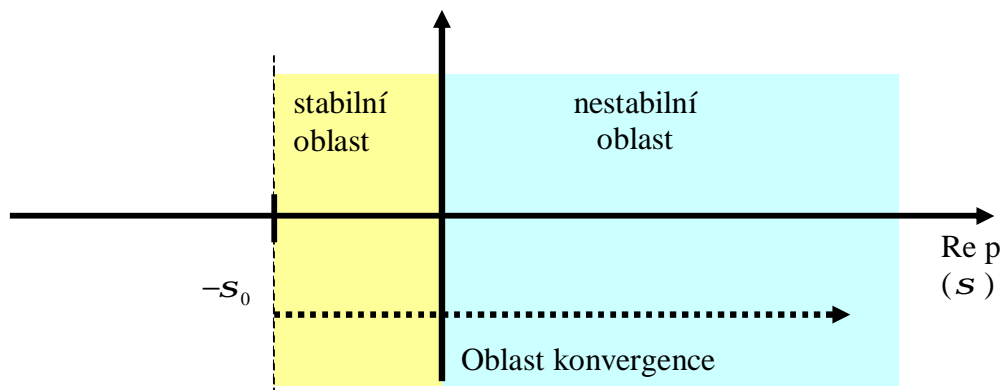
kde p_i jsou stabilní póly z rozkladu $E(p), Y(p)$ na parciální zlomky, r_i, \bar{r}_i jsou rezidua.

Z definice L transformace víme, že obrazy

$$E(p) = \int_0^{\infty} e(t)e^{-pt} dt, \quad Y(p) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-pt} dt \quad \text{existují } \forall p: \operatorname{Re}\{p\} = s \geq s_0,$$

přičemž $s_0, s_0 > 0$ je určeno podmínkou $\int_0^{\infty} |e(t)|e^{-s_0 t} dt < \infty$ a $\int_0^{\infty} |y(t)|e^{-s_0 t} dt < \infty$.

Z uvedeného vyplývá, že za s_0 můžeme považovat takový pól p_i uzavřené regulační smyčky, který má nejmenší reálnou část a oblast konvergence bude vpravo od tohoto pólu (viz obr.):



Označme nějakou reálnou nulu řízeného systému z_0 a reálný pól p_0 z oblasti konvergence (mohou být stabilní i nestabilní!).

Přenos otevřené regulační smyčky označíme $F_o(p) = F_s(p)F_R(p) = \frac{b_o(p)}{a_o(p)}$.

Pro citlivostní resp. komplementární citlivostní funkci dostáváme

$$S(p) = \frac{E(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + F_o(p)} = \frac{a_o(p)}{a_o(p) + b_o(p)} \quad \text{resp.} \quad Q(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)} = \frac{b_o(p)}{a_o(p) + b_o(p)} \quad (7.42)$$

Protože pól p_0 anuluje polynom $a_o(p)$ a nula z_0 anuluje polynom $b_o(p)$, platí

$$\begin{aligned} S(p_0) &= \frac{a_o(p_0)}{a_o(p_0) + b_o(p_0)} = 0 & Q(p_0) &= \frac{b_o(p_0)}{a_o(p_0) + b_o(p_0)} = 1 \\ S(z_0) &= \frac{a_o(z_0)}{a_o(z_0) + b_o(z_0)} = 1 & Q(z_0) &= \frac{b_o(z_0)}{a_o(z_0) + b_o(z_0)} = 0 \end{aligned} \quad (7.43)$$

Při regulaci skokové odezvy, dostáváme vzhledem k (7.43) vztahy

$$\begin{aligned} E(p_0) &= S(p_0)W(p_0) = S(p_0) \frac{1}{p_0} = 0 & Y(p_0) &= Q(p_0)W(p_0) = Q(p_0) \frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_0} \\ E(z_0) &= S(z_0)W(z_0) = S(z_0) \frac{1}{z_0} = \frac{1}{z_0} & Y(z_0) &= Q(z_0)W(z_0) = Q(z_0) \frac{1}{z_0} = 0 \end{aligned} \quad (7.44)$$

Podle (7.41) zapíšeme tyto vztahy jako **integrální omezení na dosažitelnou kvalitu regulace**:

$$E(p_0) = \lim_{p \rightarrow p_0} E(p) = \int_0^{\infty} e(t)e^{-p_0 t} dt = 0 \quad Y(p_0) = \lim_{p \rightarrow p_0} Y(p) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-p_0 t} dt = \frac{1}{p_0} \quad (7.45a)$$

$$E(z_0) = \lim_{p \rightarrow z_0} E(p) = \int_0^{\infty} e(t)e^{-z_0 t} dt = \frac{1}{z_0} \quad Y(z_0) = \lim_{p \rightarrow z_0} Y(p) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-z_0 t} dt = 0 \quad (7.45b)$$

Tato integrální omezení při regulaci skokové odezvy omezují průběh regulované veličiny $y(t)$ a regulační odchylky $e(t)$ ve stabilním uzavřeném regulačním obvodu.

1/ Řízený systém má reálný nestabilní pól p_0 ($p_0 > 0$) v oblasti konvergence.

Z prvního vztahu v (7.45a) $E(p_0) = \int_0^{\infty} e(t)e^{-p_0 t} dt = 0$ vyplývá, že regulační odchylka $e(t) = 1 - y(t)$ musí změnit znaménko, protože počáteční hodnota $e(t)$ je kladná, $e^{-p_0 t}$ znaménko nemění a integrál je roven nule. **Musí dojít k přeregulování.**

Druhý výraz v (7.45a) říká, že $y(t)$ nemusí změnit znaménko ($e^{-p_0 t}$ znaménko nemění, integrál je kladný), míra přeregulování však bude záležet na poměru „dynamiky“ regulované veličiny $y(t)$ v uzavřené regulační smyčce a exponenciály $e^{-p_0 t}$, závisující na hodnotě pólu p_0 .

„Rychlé“ nestabilní póly zřejmě způsobí vyšší přeregulování a zvětší dobu regulace.

2/ Řízený systém má reálnou nestabilní nulu z_0 ($z_0 > 0$) v oblasti konvergence.

Z prvního vztahu v (7.45b) vyplývá, že regulační odchylka $e(t) = w(t) - y(t)$ nemusí změnit znaménko (počáteční hodnota $e(t)$ je kladná, $e^{-z_0 t}$ znaménko nemění a integrál je kladný!).

Druhý výraz říká, že $y(t)$ musí změnit znaménko ($e^{-z_0 t}$ znaménko nemění a integrál musí být roven nule). **Musí dojít k podregulování!**

Na míru podregulování lze usoudit z poměru „dynamiky“ regulační odchylky $e(t)$ v uzavřené regulační smyčce a exponenciály $e^{-z_0 t}$, závisující na hodnotě nuly z_0 .

„Pomalé“ nestabilní nuly způsobí větší podregulování a zvětší dobu regulace.

Přeregulování v důsledku nestabilního pólu a podregulování v důsledku nestabilní nuly v přenosu otevřené regulační smyčky ukážeme na dvou jednoduchých příkladech.

Příklad 7.5 (nestabilní pól):

Předpoklady:

- řízený systém je 2. řádu, má astaticus a jeden nestabilní pól či jednu nestabilní nulu
- regulátor 1. řádu bude navržen tak, aby stabilní uzavřená regulační smyčka měla póly: -1, -1, -1.
- na vstup uzavřené regulační smyčky bude přiveden referenční signál ve tvaru jednotkového skoku

Přenos řízeného systému: $F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p(p-1)} = \frac{b(p)}{a(p)}$

Regulátor pro požadované umístění pólů: $F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{d_1 p + d_0}{p + c_0} = \frac{2.166p + 0.5}{p + 1.833} = \frac{d(p)}{c(p)}$

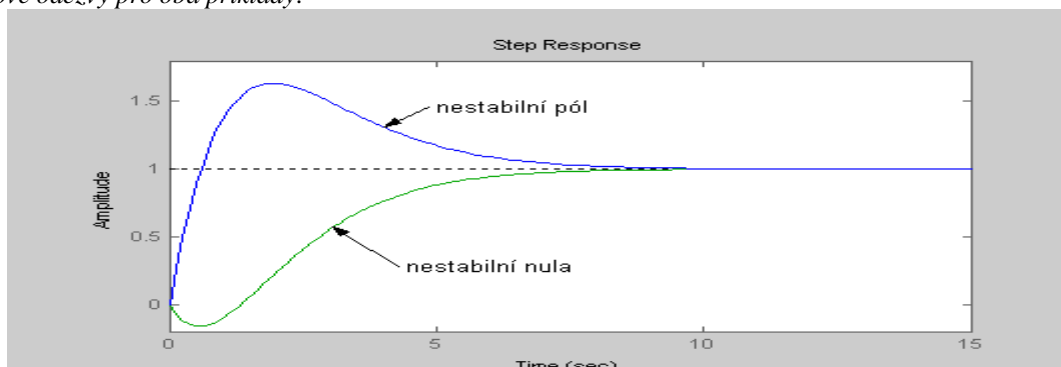
Příklad 7.6 (nestabilní nula):

Přenos řízeného systému: $F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p-1}{p(p+2)} = \frac{b(p)}{a(p)}$

Regulátor pro požadované umístění pólů: $F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{d_1 p + d_0}{p + c_0} = \frac{-0.666p - 1}{p + 1.666} = \frac{d(p)}{c(p)}$

Polynomy regulátoru $d(p)$ a $c(p)$ byly určeny z polynomiální rovnice $a(p)c(p) + b(p)d(p) = (p+1)^3$ porovnáním výrazů u stejných mocnin p .

Skokové odezvy pro oba příklady:



Získané poznatky lze zobecnit:

Protože reálné části všech pólů stabilní uzavřené regulační smyčky leží „vlevo“ od nějaké hodnoty $-s_0$, $s_0 > 0$, potom **nejen nestabilní nuly a póly, ale i stabilní nuly a póly, které leží v levé komplexní polorovině „vpravo“ od $-s_0$, jsou v oblasti konvergence $\text{Re } p > s_0$.**

Důsledek pro stabilní nulu, ležící vpravo od $-s_0$:

Respektujeme-li v integrálu pro odchylku v (7.44), (7.45) záporné znaménko stabilní nuly z_0 , potom regulační odchylka $e(t) = w(t) - y(t)$ musí změnit znaménko, protože na začátku je kladná, ale integrál je záporný.

Přechodová charakteristika uzavřeného regulačního obvodu bude tudíž vykazovat **přeregulování**.

Důsledek pro stabilní pól, ležící vpravo od $-s_0$:

Nulová hodnota integrálu pro odchylku v (7.44), (7.45) pro jakýkoliv pól p_0 ležící vpravo od $-s_0$ znamená, že regulační odchylka $e(t) = w(t) - y(t)$ musí změnit znaménko.

Přechodová charakteristika uzavřeného regulačního obvodu bude opět vykazovat **přeregulování**.

Při současném výskytu nul a pólů, splňujících podmínku konvergence, je však již obtížnější rozhodnout o charakteru odezvy, neboť roli hrají i velikosti stabilních či nestabilních nul a pólů.

Podrobnějším rozbořem bychom zjistili, že

velikost přeregulování vlivem nestabilního pólu je výraznější, je-li jeho hodnota větší oproti s_0 .

velikost přeregulování vlivem stabilního pólu je výraznější, je-li jeho hodnota menší oproti s_0 .

velikost podregulování vlivem nestabilní nuly je výraznější, je-li její hodnota menší oproti s_0 .

velikost přeregulování vlivem stabilní nuly je výraznější, je-li její hodnota menší oproti s_0 .

Příklad 7.7:

Uvažujme řízený systém s přenosem $F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p - z_0}{p(p - p_0)}$ a uvažujme tři výběry p_0, z_0 :

1/ $p_0 = -0.5, z_0 = -0.1$

2/ $p_0 = -0.5, z_0 = 0.5$

3/ $p_0 = 0.2, z_0 = 0.5$.

Ke každému výběru navrhne 1DoF dynamický regulátor: $F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{d_1 p + d_0}{p + c_0}$

tak, aby póly uzavřené regulační smyčky byly $\{-1, -1, -1\}$.

Všimněme si, že *póly a nuly systému* se budou nacházet *vpravo od pólů uzavřené smyčky* ve všech variantách.

Řešení: Polynomy regulátoru $d(p)$ a $c(p)$ určíme z polynomiální rovnice

$$a(p)c(p) + b(p)d(p) = (p+1)^3$$

porovnáním výrazů u stejných mocnin p .

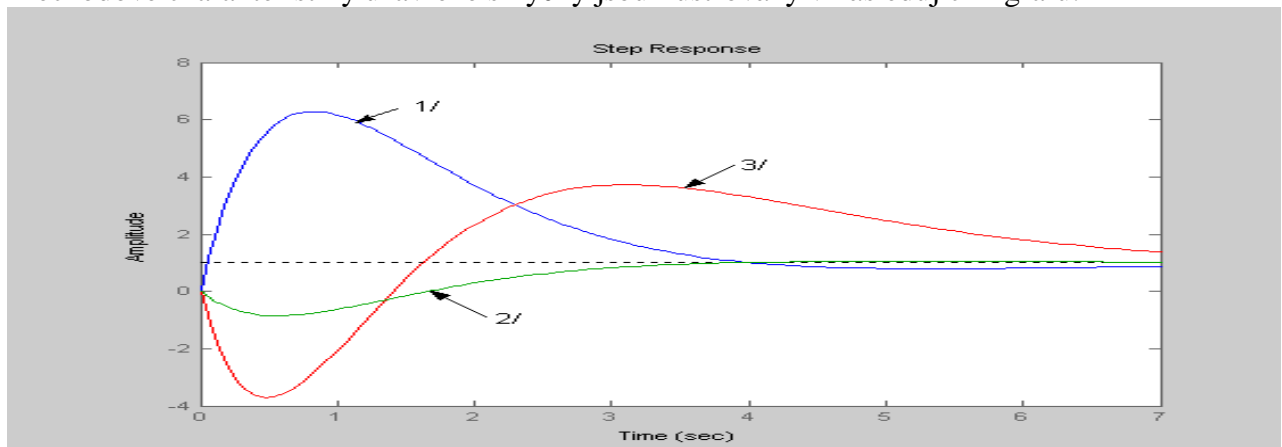
Pro jednotlivé varianty dostaneme regulátory:

$$1/ \quad F_S = \frac{p+0.1}{p(p+0.5)}, \quad F_R(p) = \frac{20.63p+10}{p-18.13}$$

$$2/ \quad F_S = \frac{p-0.5}{p(p+0.5)}, \quad F_R(p) = \frac{-3.75p-1.98}{p+6.25}$$

$$3/ \quad F_S = \frac{p-0.5}{p(p-0.2)}, \quad F_R(p) = \frac{-18.8p-2.06}{p+22}$$

Přechodové charakteristiky uzavřené smyčky jsou ilustrovány v následujícím grafu:



Komentář :

1/ systém má především malou stabilní nulu – vzniká velké přeregulování

2/ systém má nestabilní nulu a stabilní pól – vlivem nestabilní nuly vzniká podregulování, vlivem stabilního pólu vzniká přeregulování (velikost závisí na hodnotě pólu).

3/ systém má nestabilní nulu a nestabilní pól – vzniká velké podregulování i přeregulování.

8. ZÁKLADNÍ TYPY REGULÁTORŮ

V předchozím odstavci jsme se zabývali formulací a specifikací požadavků na vlastnosti uzavřené regulační smyčky. Jakmile jsou požadavky specifikovány, je přirozenou otázkou jaký regulátor může tyto požadavky splnit. Protože klasické metody návrhu regulátorů vychází z předem zvolené struktury regulátoru a metodami syntézy určujeme pouze jeho parametry, budeme nyní věnovat pozornost základním typům regulátorů, jejich popisu a vlastnostem.

A/ Dynamické regulátory

Jsou popsány dynamickým modelem, lze jimi ovlivnit polohu pólů i nul v přenosu uzavřené regulační smyčky, zvyšují řád regulační smyčky. Mohou být realizovány jako spojité (analogové) či diskrétní, s jedním či dvěma stupni volnosti (1DoF, 2DoF).

Vstupem 1DoF regulátoru je regulační odchylka $e(t) = w(t) - y(t)$, výstupem je řízení $u(t)$.

Vstupem 2DoF regulátoru je referenční signál $w(t)$ a regulovaný výstup $y(t)$, výstupem je $u(t)$.

Příkladem jsou PI, PD, PID regulátory nebo obecný dynamický regulátor.

B/ Nedyndamické regulátory

Jsou popsány nedyndamickým modelem, ovlivňují pouze polohu pólů, nezvyšují řád regulační smyčky, vstupem může být regulační odchylka nebo stav (stavová odchylka).

Příkladem je P regulátor, lineární stavový regulátor.

C/ Kombinace dynamických a nedyndamických regulátorů

Příkladem je např. stavový regulátor s integračním charakterem nebo s vnitřním modelem externích signálů a také dynamický kompenzátor (stavový regulátor + rekonstruktor stavu).

8.1. Spojité PID (PI, PD) regulátory

Název regulátorů je odvozen od způsobu generování řízení $u(t)$ v závislosti na regulační odchylce $e(t) = w(t) - y(t)$ v regulačním obvodu.

Řízení je tvořeno třemi složkami: proporcionalní (P), integrační (I) a derivační (D):

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (8.1)$$

K je proporcionalní zesílení, T_I integrační časová konstanta a T_D derivační časová konstanta.

Po aplikaci L -transformace na (8.1) dostaneme spojité přenos PID regulátoru:

$$F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p \right) = K + \frac{K_I}{p} + K_D p = \frac{K_D p^2 + K p + K_I}{p} = \frac{d(p)}{c(p)} \quad (8.2)$$

Parametry PID regulátoru:

K - zesílení, T_I - integrační časová konstanta, T_D - derivační časová konstanta

$K_I = K / T_I$, $K_D = K T_D$

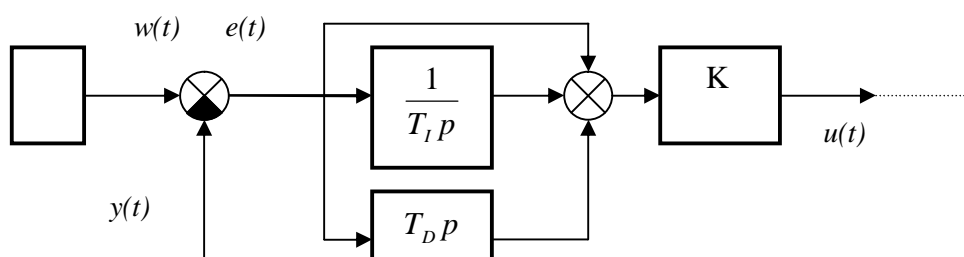
Vliv jednotlivých složek na kvalitu regulace:

P-složka: je úměrná regulační odchylce, zvyšováním K se zlepšuje přesnost regulace, rychlost odezvy se zvyšuje, nf. poruchy jsou více potlačeny, zvětšuje se přeregulování, snižuje se robustnost ve stabilitě (K_{krit} !). Složka vlastně reprezentuje nedyndamický P-regulátor.

I-složka: je úměrná integrálu regulační odchylky, je žádoucí pro dosažení přesnosti regulace, zavádí do regulační smyčky fázové zpoždění, zpomaluje rychlost odezvy, snižuje robustnost ve stabilitě, zmenšováním T_I zvyšuje přeregulování.

D-složka: je úměrná derivaci regulační odchylky, zavádí fázový předstih, zrychluje rychlost odezvy, zvětšováním T_D zmenšuje přeregulování, může zvýšit robustnost ve stabilitě.

Pro modelování PID regulátoru obvykle používáme paralelní strukturu, která umožňuje nezávislé (neinteraktivní) nastavování jednotlivých parametrů regulátoru:



Praktická realizace PID regulátoru.

„Čistá“ derivace v ideálním PID regulátoru činí potíže:

- 1/ s fyzikální realizací a s kmitáním řízení $u(t)$ při zatížení výstupu $y(t)$ vř. poruchou.
- 2/ při skokových změnách referenčního signálu $w(t)$ a poruch na výstupu vznikají prudké změny v řízení $u(t)$, které jsou nebezpečné pro funkci a životnost akčních členů.

Tyto potíže lze odstranit jednak použitím filtrované (aproximativní) derivace a jednak zapojením derivační (případně i proporcionální) složky regulátoru na regulaci od výstupu $y(t)$, protože skokové změny referenčního signálu $w(t)$ budou již odfiltrovány řízeným systémem.

PID regulátor s filtrovanou (aproximativní) derivací:

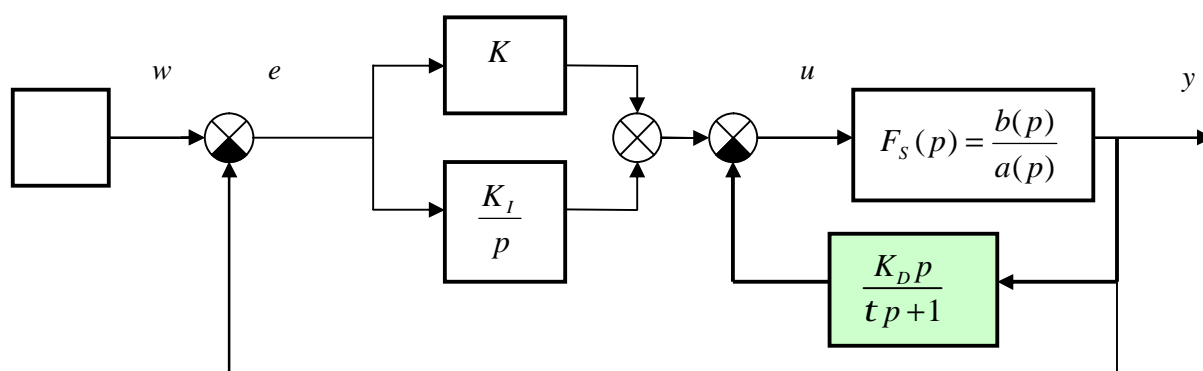
$$F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_I p} + \frac{T_D p}{t p + 1} \right) = K + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} = \frac{(K_D + K t) p^2 + (K + K_I t) p + K_I}{p(t p + 1)} = \frac{d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{p(p + c_0)} = \frac{d(p)}{c(p)}; \text{ kde } t \text{ je malá volená časová konstanta } t \cong T_D / (3 \div 20). \quad (8.3)$$

Použijeme-li PID regulátor pro řízení systému s přenosem $F_S(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$, dostaneme přenos uzavřené regulační smyčky ve tvaru:

$$F_{y,w}(p) = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)} = \frac{\frac{b(p)}{a(p)} \left(K + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} \right)}{1 + \frac{b(p)}{a(p)} \left(K + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} \right)} = \dots = \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} \quad (8.4)$$

Je zřejmé, že velikost parametru K_D v derivační složce v čitateli přenosu ovlivní „divokost“ reakcí regulované veličiny $y(t)$ na skokové změny $w(t)$.

PID regulátor s derivační složkou odvozenou od regulovaného výstupu



V tomto případě přenos uzavřené regulační smyčky již nemá derivační složku v čitateli

$$F_{y,w}(p) = \frac{F_o(p)}{1+F_o(p)} = \frac{\frac{b(p)}{a(p)} \left(K + \frac{K_I}{p} \right)}{1 + \frac{b(p)}{a(p)} \left(K + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} \right)} \quad (8.5)$$

a na skokové změny referenčního signálu bude reagovat umírněněji.

PI a PD regulátor

Tyto regulátory jsou pouze dvousložkové a jsou vlastně speciálním případem PID regulátoru.

$$\text{Přenos PI regulátoru: } F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_I p} \right) = K \left(\frac{p + \frac{1}{T_I}}{p} \right) = K + \frac{K_I}{p} \quad (8.6)$$

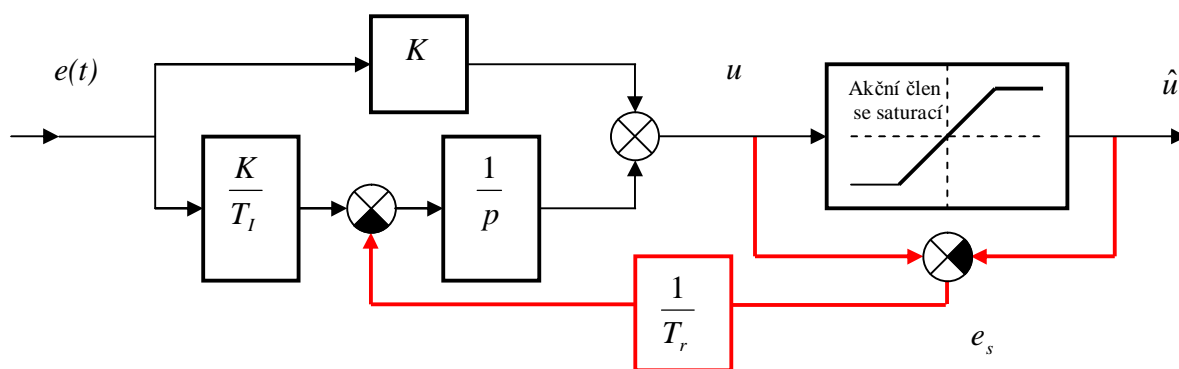
Regulátor PI zavádí do regulační smyčky astatismus (pól v nule), hodnota nuly je nastavitelná integrační časovou konstantou T_I .

$$\text{Přenos PD regulátoru: } F_R(p) = K \left(1 + \frac{T_D p}{t p + 1} \right) = K \left(\frac{(T_D + t)p + 1}{t p + 1} \right) = K + \frac{K_D p}{t p + 1} \quad (8.7)$$

Regulátor PD zavádí do regulační smyčky nulu, jejíž hodnota je nastavitelná derivační časovou konstantou T_D a časovou konstantou t , přičemž $t \cong T_D / (3 \div 20)$. Hodnotu pólu určuje t .

Poznámka 8.1.:

V praxi se obvykle setkáváme s řízenými systémy, které mají na svém vstupu akční člen přecházející do saturace při určité hodnotě řízení. Je-li pro řízení použit regulátor s integrační složkou (PI, PID), může být regulační odchylka tak velká, že integrační složka způsobí saturaci akčního členu (např. ventil přejede do krajní polohy) a zpětnovazební řízení bude nefunkční, i když se bude regulovaný výstup měnit. Dojde-li posléze k omezení velikosti regulační odchylky, může vlivem „naintegrované“ hodnoty trvat značně dlouho, než se obnoví správná funkce regulátoru. Tento efekt se nazývá „unášení integrace“ (wind-up effect) a jedna z možností jak mu zabránit je uvedena na následujícím schéma s PI regulátorem.



PI regulátor je doplněn zpětnovazební smyčkou odvozenou od odchylky $e_s = u - \hat{u}$, dané rozdílem měřeného výstupu regulátoru u a měřeného výstupu akčního členu \hat{u} . Odchylka je vedena zpět na integrátor přes zesílení $1/T_r$. Není-li akční člen saturován, je odchylka nulová a řízení probíhá v lineární oblasti. Jakmile je akční člen saturován, zpětná vazba působí tak, aby odchylka e_s byla opět nulová, jinak řečeno, integrace se přepočítává tak, aby se výstup regulátoru u dostal na mez saturace. Rychlost „resetování integrátoru“ lze ovlivnit volbou časové konstanty T_r .

8. 2. Diskrétní PID (PI, PD) regulátory

V 5. kapitole jsme uvedli, že pro návrh diskretních regulátorů lze použít dva principiálně odlišné přístupy, které se liší výchozím tvarem modelu řízeného systému (spojitý model nebo diskretní model s tvarovačem 0. řádu).

V prvním případě navrhujeme spojité regulátory a následně provedeme jeho diskretizaci dle odstavce 5.6. Ve druhém případě vycházíme přímo z diskretního tvaru regulátoru.

1/ Diskrétní PID (PI,PD) regulátory získané diskretizací spojitých PID (PI,PD) regulátorů

Pro získání diskretních verzí spojitých PID, PI, PD regulátorů lze doporučit *lichoběžníkovou (Tustinovu) aproximaci*, při které provádíme ve spojitém přenosu navrženého regulátoru $F_R(p)$ substituci:

$$F_R(z) = F_R(p) \Big|_{p=\frac{2z-1}{Tz+1}} \quad \text{nebo} \quad F_R(z^{-1}) = F_R(p) \Big|_{p=\frac{21-z^{-1}}{T1+z^{-1}}}, \quad T \text{ je perioda vzorkování.}$$

Například pro spojité PID regulátory s filtrovanou (aproximovanou) derivací (8.3) bychom dostali diskretní přenos druhého řádu se stejným stupněm polynomů v čitateli i jmenovateli přenosu:

$$F_R(z^{-1}) = \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{d_2 z^{-2} + d_1 z^{-1} + d_0}{(1-z^{-1})(1+cz^{-1})} = \frac{d_2 z^{-2} + d_1 z^{-1} + d_0}{1+(c-1)z^{-1}-cz^{-2}} \quad (8.8)$$

Parametry diskretního regulátoru d_0, d_1, d_2, c budou funkcemi parametrů spojitěho PID regulátoru (K, T_I, T_D) nebo (K, K_I, K_D) , přičemž předpokládáme pevně zvolenou časovou konstantu t pro filtrovanou derivaci (obvykle lze volit $t = T_D / 10$). Diskretní přenos bude mít dvě nastavitelné nuly, jeden pól musí mít hodnotu $z = 1$, druhý pól vzniká v důsledku použití filtrované derivace a má obecnou hodnotu $z = -c$.

Algoritmus řízení (absolutní-polohový a přírůstkový-rychlostní)

Uvažujme diskretní přenos regulátoru (8.8). Pro obrazy výstupu a vstupu regulátoru platí vztah

$$\left[1+(c-1)z^{-1}-cz^{-2}\right]U(z^{-1}) = \left[d_2 z^{-2} + d_1 z^{-1} + d_0\right]E(z^{-1})$$

Po zpětné Z -transformaci dostáváme v časové oblasti pro $k = 0, 1, \dots$, algoritmus řízení

$$u(k) = -(c-1)u(k-1) + cu(k-2) + d_0 e(k) + d_1 e(k-1) + d_2 e(k-2), \quad e(k) = w(k) - y(k) \quad (8.9)$$

Algoritmus řízení se nazývá **absolutní (polohový)**, nemá rekurentní charakter, akční člen řízeného systému je ovlivněn celou hodnotou řízení $u(k)$, v paměti jsou uložena předchozí měření.

V praxi se také často používá **přírůstkový (rychlostní) algoritmus řízení**, zejména pokud má akční člen *integrační charakter* (např. při řízení servopohonů).

Algoritmus řízení je rekurentní, akční člen je ovlivňován pouze přírůstkovou hodnotou řízení $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ a v paměti jsou uložena pouze poslední měření. Při přepínání z ruční regulace na automatickou nedochází k nežádoucím „rázům“.

Absolutní a přírůstkový algoritmus budeme ilustrovat na ideálním spojitěm PID regulátoru, který bude pro jednoduchost diskretizován s použitím zpětné obdélníkové aproximace (přednost by ovšem měla lichoběžníková - Tustinova aproximace).

Ideální spojité PID regulátory generuje podle (7.1) řízení

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Po diskretizaci s periodou vzorkování T dostáváme nerekurentní **absolutní algoritmus řízení**

$$u(k) = K \left\{ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i) + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad e(k) = w(k) - y(k) \quad (8.10)$$

Vidíme, že pro výpočet hodnoty řízení v k -tém kroku u *absolutního algoritmu řízení* je nutné ukládat do paměti *všechny minulé hodnoty regulační odchylky* a akční orgán je ovlivněn vždy „celou hodnotou“ $u(k)$.

U *přírůstkového algoritmu řízení*, je na akční orgán přiváděna pouze přírůstková hodnota řízení $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ a v každém kroku potřebujeme znát pouze *aktuální měření* $e(k)$:

$$\text{Odečteme-li od (8.10) } u(k-1) = K \left\{ e(k-1) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_D}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right\},$$

dostaneme *přírůstkový algoritmus řízení*

$$u(k) - u(k-1) = K [e(k) - e(k-1)] + K \frac{T}{T_I} e(k) + K \frac{T_D}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)], \quad (8.11)$$

který lze zapsat ve tvaru

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = d_0 e(k) + d_1 e(k-1) + d_2 e(k-2), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad e(k) = w(k) - y(k), \quad (8.12)$$

$$\text{přičemž při zvolené diskretizaci platí: } d_0 = K \left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right), \quad d_1 = K \left(-1 - 2 \frac{T_D}{T} \right), \quad d_2 = K \frac{T_D}{T}$$

Poznámka:

Při regulaci na konstantní hodnotu musí být v přírůstkovém algoritmu řízení obsažena integrační složka řízení, protože je to jediná složka, která má informaci o velikosti konstantního referenčního signálu!

Přesvědčíme se o tom dosazením

$$e(k) = w - y(k), \quad e(k-1) = w - y(k-1), \quad e(k-2) = w - y(k-2)$$

do (8.11). Referenční signál $w = \text{konst.}$ se v *proporcionální a derivační složce* odečte a zůstane pouze v *integrační složce*.

2/ Tvary diskrétních přenosů PID, PI, PD regulátorů pro přímý návrh diskrétního řízení

Z diskretizace spojitéch PID, PI, PD regulátorů vyplývá, že způsobem diskretizace ovlivníme funkční závislost parametrů diskrétního regulátoru na parametrech spojitého regulátoru, ale formální tvar diskrétních přenosů regulátorů s nespécifikovanými parametry můžeme zachovat a použít pro přímý návrh diskrétního řízení. Hodnotu parametrů určí použitá metoda syntézy.

Pro přímý návrh diskrétního řízení budeme tedy uvažovat diskrétní přenosy regulátorů ve tvaru:

$$\begin{aligned} \text{Diskrétní PID regulátor: } F_R(z^{-1}) &= \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{d_2 z^{-2} + d_1 z^{-1} + d_0}{(1 - z^{-1})(1 + c z^{-1})} \\ \text{Diskrétní PI regulátor: } F_R(z^{-1}) &= \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{d_1 z^{-1} + d_0}{(1 - z^{-1})} \\ \text{Diskrétní PD regulátor: } F_R(z^{-1}) &= \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{d_1 z^{-1} + d_0}{(1 + c z^{-1})} \end{aligned} \quad (8.13)$$

8.3. Obecný dynamický regulátor

Obecný dynamický regulátor je zobecněním popsaných dynamických regulátorů PID, PI, PD. Popíšeme jej ryzí přenosovou funkcí m -tého řádu s $2m+1$ nastavitelnými parametry:

$$\begin{aligned} F_R(p) &= \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{d_m p^m + d_{m-1} p^{m-1} + \dots + d_1 p + d_0}{p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \dots + c_1 p + c_0} \quad \text{pro spojitou verzi} \\ F_R(z^{-1}) &= \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{d_m z^{-m} + d_{m-1} z^{-m+1} + \dots + d_1 z^{-1} + d_0}{z^{-m} + c_{m-1} z^{-m+1} + \dots + c_1 z^{-1} + c_0} \quad \text{pro diskrétní verzi} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Obecný dynamický regulátor je možné použít jako 1DoF i 2DoF regulátor, větší počet nastavitelných parametrů se využívá pro řešení složitějších úloh řízení vedoucích např. k nutnosti použití *principu vnitřního modelu* (viz 9. kapitola).

8.4. Lineární stavový regulátor

Patří mezi nedynamické regulátory, zpětnovazební řízení je generováno jako **lineární kombinace měřitelných složek vektoru stavu**.

Uvažujme stavový popis říditelného spojitého LDS s jedním vstupem a výstupem

$$\begin{aligned} S: \quad \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) \dots \text{počáteční podmínky, } x(t) \in R^n, u(t) \in R^1, y(t) \in R^1 \quad (8.15) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

a rovnici spojitého lineárního stavového regulátoru

$$\text{Reg.: } u(t) = -k^T x(t), \quad k^T \dots 1 \times n \text{ konstantní matice} \quad (8.16)$$

Pro uzavřený systém dostáváme

$$\begin{aligned} S_z: \quad \dot{x}(t) &= (A - bk^T)x(t), \quad x(t_0) \quad (8.17) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

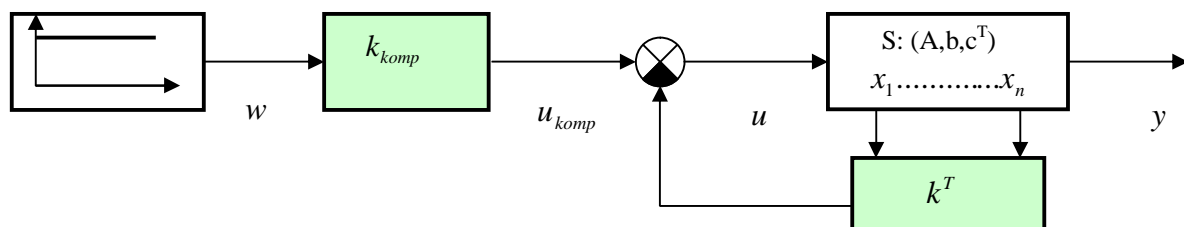
Pro asymptoticky stabilní uzavřený systém bude platit $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Lineární stavový regulátor (8.11) tedy řídí počáteční stav $x(t_0)$ „do nuly“.

Pokud chceme řešit úlohy regulace na konstantní hodnotu či obecné úlohy sledování, specifikované referenčním signálem $w(t)$, je nutné doplnit stavové zpětnovazební řízení o **kompensační řízení** $u_{komp}(t)$.

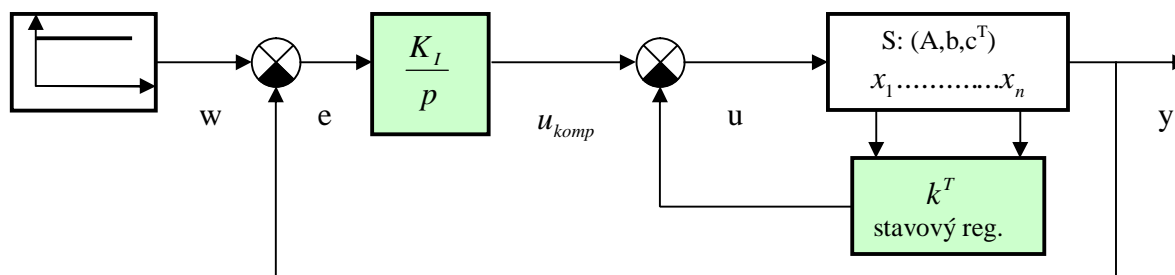
$$\text{Rovnice lineárního stavového regulátoru má potom tvar: } u(t) = -k^T x(t) + u_{komp}(t). \quad (8.18)$$

Jako příklad použití tohoto regulátoru je na následujícím schéma znázorněna regulace skokové odezvy (s kompenzací statického zesílení pro dosažení požadované ustálené hodnoty výstupu):



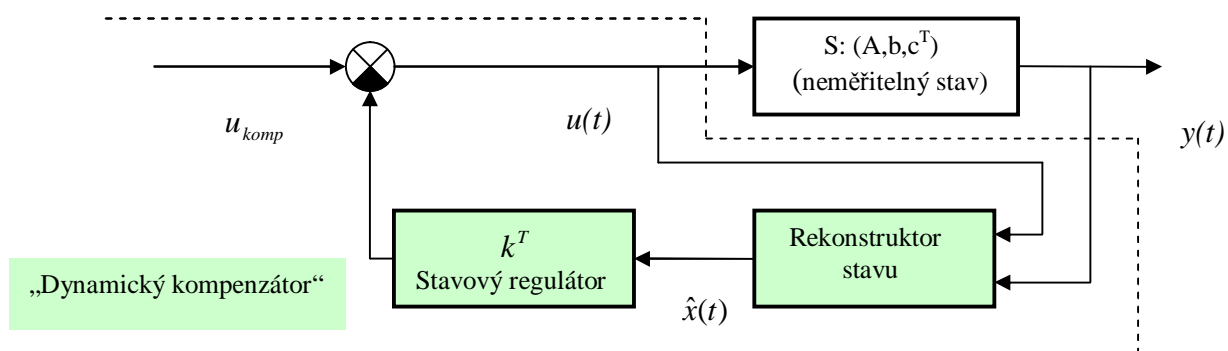
Stejný problém lze řešit elegantněji s použitím **lineárního stavového regulátoru s integračním charakterem**, kdy při regulaci na konstantní hodnotu není nutné zesílení kompenzovat (otevřená regulační smyčka má zavedený astatismus 1. řádu, tj. obsahuje model generátoru referenčního signálu $w(t)$ – viz „**princip vnitřního modelu**“ v 9. kapitole).

Regulátor sestává z nedynamické a dynamické části - je příkladem kombinace nedynamického a dynamického regulátoru.



Tyto regulátory lze dále zobecnit v tom smyslu, že dynamická část může obsahovat model generátoru externího signálu.

Na závěr přehledu základních typů regulátorů uvažujme ještě situaci, kdy chceme použít lineární stavový regulátor, ale *nejsou měřitelné všechny složky vektoru stavu řízeného systému*. V takovém případě je nutné navrhnout nějaký *rekonstruktor stavu* (tj. dynamický systém na jehož vstup je přiveden měřený vstup a výstup řízeného systému a generuje rekonstruovaný stav $\hat{x}(t)$). Rekonstruovaný stav $\hat{x}(t)$ může za určených podmínek zastoupit neměřitelný stav $x(t)$ v navrženém stavovém regulátoru (viz 10. kapitola):



Stavový regulátor je popsán, analogicky k (8.13), rovnicí

$$u(t) = -k^T \hat{x}(t) + u_{komp}(t), \quad (8.19)$$

Do regulátoru je ovšem nutné zahrnout i *dynamický systém rekonstrukce stavu $\hat{x}(t)$* a *regulátor je tudíž dynamický*. Bývá také označován jako „*dynamický kompenzátor*“.

9. KLASICKÉ METODY NÁVRHU REGULÁTORŮ

Široké spektrum návrhových metod, se kterým se setkáváme v odborné literatuře, vyplývá jednak z variability řízených systémů, z variability formulovaných požadavků na kvalitu regulovaného procesu (často protichůdných nebo i nerealizovatelných), z možnosti použití různých typů regulátorů a také z rozsáhlosti matematického aparátu, který lze použít při řešení úloh formulovaných buď v časové, algebraické či frekvenční oblasti.

Návrhové metody, které spoléhají na (hypotetickou) možnost získání přesného matematického modelu řízených systémů a formulují matematicky i požadavky na kvalitu regulace, určí při zvolené struktuře regulátoru v podstatě exaktním způsobem jeho parametry. Návrhové metody však mohou být výpočetně náročné, požadavky na kvalitu regulace mohou být formulovány spíše s ohledem na snazší matematické zpracování než na charakterizaci řízeného procesu a výsledný regulátor nemusí být dostatečně robustní pro použití v průmyslových aplikacích. Na druhé straně se používají v průmyslových aplikacích i *empirické postupy seřizování* regulátorů (obvykle pro PI, PID regulátory), které znalost exaktního matematického modelu řízeného systému nevyžadují (pouze některé jeho charakteristiky), požadavky na regulovaný proces jsou formulovány jen kvalitativně a jak říká název, empirický postup návrhu nebývá výrazněji podložen ani teorií. Takto navržené regulátory přirozeně nemohou splnit přísnější požadavky na kvalitu a jejich úkolem je v podstatě získání času pro návrh efektivnějšího regulátoru.

Znovu připomeňme, že klasické metody návrhu regulátorů vycházejí ze znalosti adekvátního modelu řízeného systému, předpokládají předem zvolenou strukturu regulátoru a kvantitativní vyjádření pokud možno všech formulovaných požadavků. Výsledkem návrhu je stanovení takových hodnot parametrů v dané struktuře regulátoru, které v definovaném smyslu nejlépe splňují formulované a kvantifikované požadavky.

V dalším uvedeme některé používané návrhové metody v časové, algebraické a frekvenční oblasti.

9.1. Empirické postupy při návrhu regulátorů

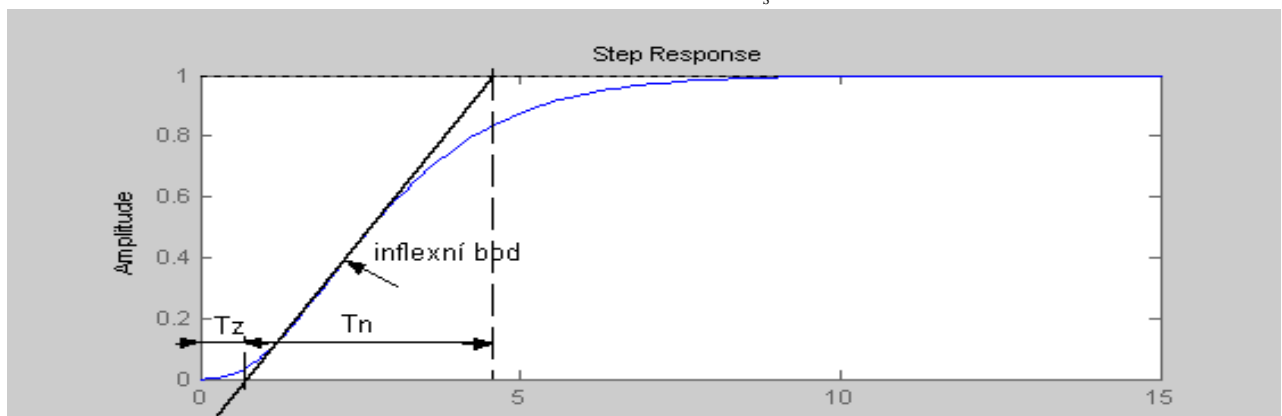
a/ Časová metoda Ziegler-Nichols

Umožní nastavení parametrů P, PI a PID regulátorů na základě experimentálně zjištěné odezvy na skokovou změnu vstupu řízeného systému (viz obr.).

Předpoklady:

Monotónní odezva systému bez astatismu, ideální PID regulátor, $T_n > 2.5T_z$ (T_n je „doba náběhu“, T_z je „doba průtahu“ resp. doba fiktivního dopravního zpoždění).

Pro nastavení parametrů regulátoru stačí zjistit z naměřené odezvy dobu průtahu T_z a maximální strmost odezvy S (směrnice tečny v inflexním bodě, $S = K_s / T_n$, K_s je statické zesílení)



Experimentálně zjištěná skoková odezva (statické zesílení 1)

Parametry regulátorů P, PI a PID určíme z tabulky

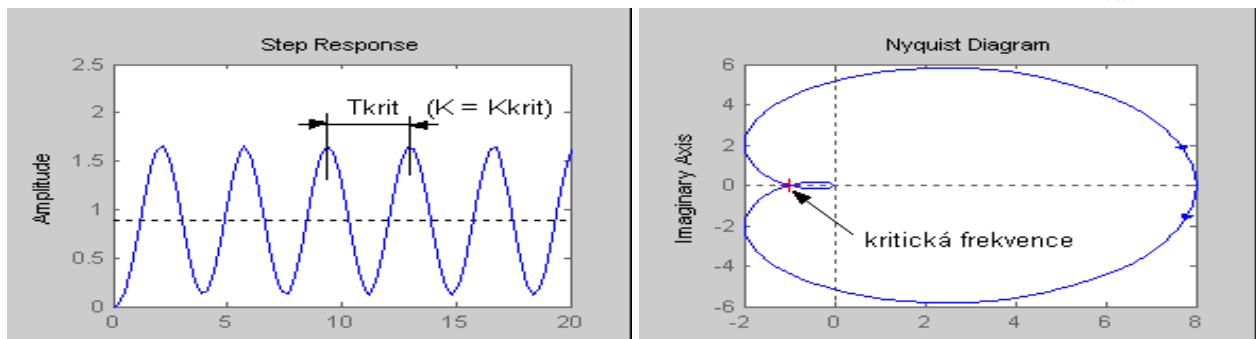
| | K | T_I | T_D |
|-----------------|----------------------|-----------|----------|
| P - regulátor | $\frac{1}{ST_z}$ | | |
| PI - regulátor | $0.9 \frac{1}{ST_z}$ | $3.33T_z$ | |
| PID - regulátor | $1.2 \frac{1}{ST_z}$ | $2T_z$ | $0.5T_z$ |

Je to nespolehlivá metoda a může vést i k nestabilitě uzavřené regulační smyčky.

b/ Frekvenční metoda Ziegler-Nichols

Umožní přibližné nastavení parametrů P, PI a PID regulátorů na základě experimentu prováděného v uzavřené regulační smyčce:

- 1/ Regulátor v uzavřené regulační smyčce nastavíme jako P-regulátor ($T_D = 0$, $T_I \rightarrow \infty$) a zvětšujeme zesílení regulátoru K až do vzniku netlumených kmitů tj. při $K = K_{krit}$.
- 2/ Na záznamu průběhu regulované veličiny odměříme periodu netlumených kmitů T_{krit} .



Parametry regulátorů P, PI, PID určíme pomocí zjištěných K_{krit} a T_{krit} z tabulky

| | K | T_I | T_D |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| P - regulátor | $0.5K_{krit}$ | | |
| PI - regulátor | $0.45K_{krit}$ | $0.83T_{krit}$ | |
| PID - regulátor | $0.6K_{krit}$ | $0.5T_{krit}$ | $0.12T_{krit}$ |

Metoda vychází ze znalosti jednoho bodu frekvenční charakteristiky, který je specifikován hodnotami K_{krit} a $\omega_{krit} = 2p/T_{krit}$. Podobně jako časová metoda Ziegler-Nichols, je i tato metoda nespolehlivá.

V praxi se ještě pro nastavení parametrů PID regulátoru využívají různé varianty metod pokus-omyl, z nichž nejznámější doporučuje následující postup:

- 1/ Regulátor v uzavřené regulační smyčce nastavíme jako P-regulátor ($T_D = 0$, $T_I \rightarrow \infty$), zvyšujeme zesílení regulátoru K až do vzniku netlumených kmitů a zmenšíme ho na polovinu.
- 2/ Ponecháme nastavené K a snižujeme hodnotu integrační časové konstanty T_I až do vzniku netlumených kmitů a potom ji 3x zvětšíme.
- 3/ Při nastavených K a T_I zvyšujeme hodnotu derivační časové konstanty T_D až do vzniku netlumených kmitů a potom ji 3x zmenšíme.

9.2. Návrh regulátorů dle požadavku na minimum integrálních kritérií kvality

Jednou z možností jak vyjádřit požadavky na kvalitu regulace v časové oblasti je jejich vyjádření integrálními kritérii kvality (7.40).

Návrh regulátoru dle minima kritéria ISE – “minima kvadratické regulační plochy”

Formulace úlohy pro spojité systémy:

Pro řízený systém popsaný přenosovou funkcí $F_S(p)$ a pro daný referenční signál $w(t)$ zvolte vhodný typ regulátoru $F_R(p, q)$ a určete jeho parametry q tak, aby bylo minimalizováno kritérium

$$\text{ISE} : J(q) = \int_0^{\infty} e^2(t, q) dt = \int_0^{\infty} [w(t) - y(t, q)]^2 dt \quad (9.1)$$

Úloha vede na parametrickou optimalizaci kritéria optimality, která ovšem předpokládá stabilní uzavřený regulační obvod a konečnou hodnotu kritéria. Musí být tudíž splněna podmínka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t, q) = 0 \quad \text{resp.} \quad \lim_{p \rightarrow 0} pE(p, q) = 0, \quad (9.2)$$

kteřá je vodítkem pro výběr přípustného typu regulátoru. Například při regulaci na konstantní hodnotu $w(t) = \text{konst.}$ je pro splnění podmínky (9.2) nutné, aby otevřená regulační smyčka měla astatismus 1. řádu.

Nemá-li astatismus řízený systém, musí jej dodat regulátor a přípustným typem regulátoru bude PI nebo PID regulátor (viz přesnost regulace odst. 7.3.).

Postup řešení:

- 1/ Použijeme *Parcevalův vztah* (7.37) pro převedení kritéria ISE z časové oblasti do frekvenční oblasti a dosadíme do kritéria určený obraz regulační odchylky $E(p, q)$.
- 2/ Hodnotu kritéria, udávající velikost kvadratické regulační plochy, vyjádříme jako funkci parametrů zvoleného typu regulátoru (pro regulaci na konstantní hodnotu bývá tabelována).
- 3/ Optimální hodnoty parametrů regulátoru q_i^* určíme z nutných podmínek minima kritéria ISE

$$\left. \frac{\partial J(q)}{\partial q_i} \right|_{q_i = q_i^*} = 0 \quad i = 1, \dots \quad (9.3)$$

a stability uzavřeného regulačního obvodu.

Ad1/ Parcevalův vztah a obraz regulační odchylky

$$J(q) = \int_0^{\infty} e^2(t, q) dt = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} E(jw, q) E(-jw, q) dw = \frac{1}{2pj} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(p, q) E(-p, q) dp \quad (9.4)$$

Stanovíme L-obraz regulační odchylky

$$E(p) = \frac{1}{1 + F_o(p, q)} W(p) = \frac{1}{1 + \frac{b_o(p, q)}{a_o(p, q)}} W(p) = \frac{a_o(p, q)}{a_o(p, q) + b_o(p, q)} W(p) = \frac{l(p, q)}{r(p, q)} \quad (9.5)$$

kde koeficienty polynomů $l(p, q) = l_m p^m + \dots + l_1 p + l_0$ a $r(p, q) = r_n p^n + \dots + r_1 p + r_0$ jsou funkcemi parametrů zvoleného typu regulátoru.

Z (9.5) vyplývá, že *relativní řád polynomiálního zlomku $E(p)$ je určen pouze relativním řádem obrazu referenčního signálu $W(p)$.*

Při regulaci skokové odezvy $w(t) = 1[t]$ bude $\text{st } l(p) = \text{st } r(p) - 1$, protože $W(p) = 1/p$.

Ad2/ Určení kvadratické regulační plochy jako funkce parametrů regulátoru

$$J(q) = \frac{1}{2pj} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(p, q) E(-p, q) dp = \frac{1}{2pj} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{l(p, q)}{r(p, q)} \frac{l(-p, q)}{r(-p, q)} dp = \frac{1}{2pj} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[\frac{q(p, q)}{r(p, q)} + \frac{q(-p, q)}{r(-p, q)} \right] dp \quad (9.6)$$

Zavedením polynomu $q(p, q) = q_m(q)p^m + \dots + q_1(q)p + q_0(q)$, st $q(p, q) = \text{st } l(p, q)$, s koeficienty $q_i(q)$, $i = 0, 1, \dots, m$, závislými na parametrech zvoleného typu regulátoru, převedeme součinnový tvar kritéria na součtový.

Pro čitatele polynomiálních zlomků v (9.6) dostáváme polynomiální rovnici

$$l(p, q)l(-p, q) = q(p, q)r(-p, q) + q(-p, q)r(p, q), \quad (9.7)$$

Z této rovnice určíme koeficienty $q_i(q)$, $i = 0, 1, \dots, m$ polynomu $q(p, q)$ porovnáním výrazů u stejných (sudých!) mocnin proměnné p .

Určeme nyní velikost kvadratické regulační plochy (9.6), ale bez jejího „zrcadlového“ obrazu, který nalezení minima stejně neovlivní.

Uvažujme tedy kvadratickou regulační plochu danou hodnotou kritéria $\bar{J}(q) = \frac{1}{2pj} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{q(p, q)}{r(p, q)} dp$.

Označíme $Z(p) = \frac{q(p, q)}{r(p, q)}$ a velikost plochy určíme s využitím zpětné Laplaceovy transformace:

$$\bar{J}(q) = \frac{1}{2pj} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{q(p, q)}{r(p, q)} dp = \frac{1}{2pj} \int_{-j\infty}^{j\infty} Z(p)e^{pt} dp \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} L^{-1}\{Z(p)\} = \lim_{t \rightarrow 0} z(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pZ(p) \Rightarrow$$

$$\bar{J}(q) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{q(p, q)}{r(p, q)} = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{q_m(q)p^m + \dots + q_0(q)}{r_n(q)p^n + \dots + r_0(q)} \quad (9.8)$$

Polynom $r(p, q)$ určíme z (9.5), polynom $q(p, q)$ je dán řešením polynomiální rovnice (9.7).

Ad3/ Určení optimálních hodnot parametrů q^*

Optimální hodnoty parametrů q^* musí minimalizovat uvažované kritérium kvality (9.8),

jsou určeny z nutné podmínky minima $\frac{\partial \bar{J}(q)}{\partial q_i} = 0$, $i = 1, \dots$ a musí stabilizovat uzavřenou

regulační smyčku (určené parametry testujeme např. aplikací Hurwitzova kritéria stability na charakteristický polynom uzavřené regulační smyčky).

Poznámka 9.1.:

V obvyklém případě regulace na konstantní hodnotu $w(t) = \text{konst.}$ bude relativní řád polynomiálního zlomku $E(p)$ roven jedné, a tedy $\text{st } l(p) = \text{st } q(p) = n - 1$. Potom podle (9.8)

$$\bar{J}(q) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{q_m(q)p^m + \dots + q_0(q)}{r_n(q)p^n + \dots + r_0(q)} = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{q_{n-1}(q)p^{n-1} + \dots + q_0(q)}{r_n(q)p^n + \dots + r_0(q)} = \frac{q_{n-1}(q)}{r_n(q)} \quad (9.9)$$

a optimální hodnoty parametrů q_i^* určíme z nutné podmínky minima

$$\frac{\partial \bar{J}(q)}{\partial q_i} \Big|_{q_i=q_i^*} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{q_{n-1}(q)}{r_n(q)} \Big|_{q_i=q_i^*} = 0, \quad i = 1, \dots \quad (9.10)$$

Příklad 9.1:

K řízenému systému s přenosem $F_S(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1.5p + 0.5)}$ navrhnete P-regulátor s přenosem $F_R(p) = K$

tak, aby bylo minimalizováno kritérium ISE! Referenčním signálem bude $w(t) = 1[t]$.

Protože řízený systém má astatismus, je při regulaci na konstantní hodnotu přípustný např. P-regulátor a integrální kritérium ISE bude nabývat konečné hodnoty. Regulátor má jediný parametr $q = K$.

1/ Vypočteme obraz regulační odchylky:

$$E(p) = \frac{1}{1 + F_o(p)} W(p) = \frac{1}{1 + \frac{K}{p(p^2 + 1.5p + 0.5)}} \frac{1}{p} = \frac{p^2 + 1.5p + 0.5}{p^3 + 1.5p^2 + 0.5p + K} = \frac{l(p)}{r(p, K)}$$

(Všimněme si, že platí požadované $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + F_o(p)} W(p) = 0$)

2/ Zavedeme polynom $q(p) = q_2 p^2 + q_1 p + q_0$, st $q(p) = st l(p)$ a určíme jeho koeficienty z (9.7):

$$l(p)l(-p) = q(p)r(-p, K) + q(-p)r(p, K).$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$p^4 - 1.25p^2 + 0.25 = (3q_2 - 2q_1)p^4 + (2q_2K - q_1 + 3q_0)p^2 + 2q_0K$$

Z porovnání výrazů u stejných mocnin p dostaneme:

$$q_0(K) = \frac{0.25}{2K}, \quad q_1(K) = 2q_2K + 1.25 + \frac{0.375}{K}, \quad q_2(K) = \frac{3.5K + 0.75}{3K - 4K^2}$$

3/ Určíme hodnotu kritéria jako funkci parametru K

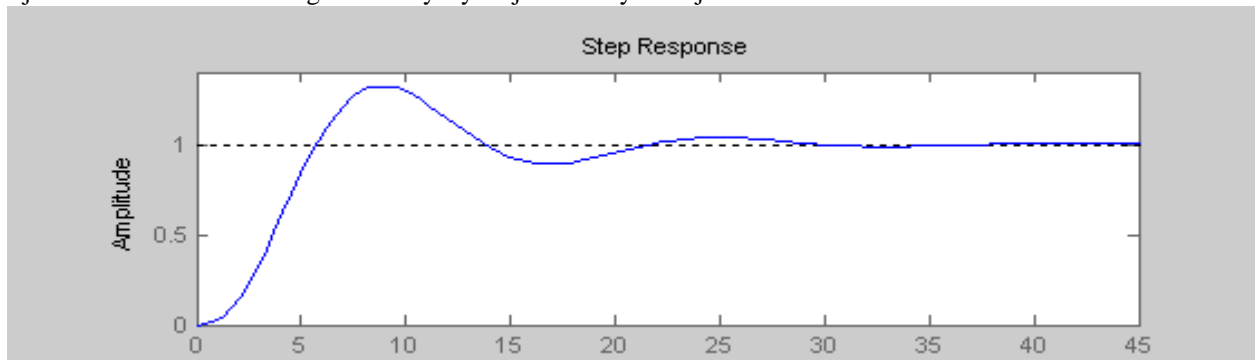
$$\bar{J}(K) = \frac{q_{n-1}(K)}{r_n(K)} = \frac{q_2(K)}{r_3(=1)} = \frac{3.5K + 0.75}{3K - 4K^2}$$

4/ Určíme optimální hodnotu K^*

$$\frac{\partial \bar{J}(K)}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} \frac{3.5K + 0.75}{3K - 4K^2} = 0 \Rightarrow 14K^2 + 6K - 2.25 = 0 \Rightarrow K_{1,2}^* = \{0.24, -0.67\}$$

Z charakteristického polynomu uzavřené regulační smyčky $p^3 + 1.5p^2 + 0.5p + K$ je zřejmé, že stabilní uzavřenou regulační smyčku zaručí pouze P-regulátor s přenosem $F_R(p) = K^* = 0.24$.

Zjištěná odezva uzavřené regulační smyčky na jednotkový skok je na obrázku:



Návrh regulátorů dle minima "časově vážených" kritérií ISE

Návrh regulátorů dle minima kritéria ISE sice zaručuje minimální plochu vymezenou průběhem $e^2(t)$, regulace však může být příliš kmitavá a doba regulace velká. Příčinou je, že regulační odchylka je stále stejně „vážená“ v čase.

Namísto kritéria ISE lze však použít některé jeho modifikace, které zohledňují požadavek na rychlost regulace a v rámci prezentované metody návrhu regulátoru můžeme postupovat v podstatě shodným způsobem.

$$\text{Časově vážené kritérium ISE : } J(q) = \int_0^{\infty} [te(t, q)]^2 dt \quad (9.11)$$

Protože platí $L\{te(t, q)\} = -\frac{d}{dp} E(p, q) = E_1(p, q)$, (viz LS1, odst. 2.1), postupujeme při návrhu regulátoru stejným způsobem jako v předchozím případě, ale pro kritérium

$$J(q) = \int_0^{\infty} [te(t, q)]^2 dt = \frac{1}{2p j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E_1(p, q) E_1(-p, q) dp; \quad E_1(p) = -\frac{d}{dp} \frac{l(p, q)}{r(p, q)} \quad (9.12)$$

$$\text{Exponenciálně vážené kritérium ISE : } J(q) = \int_0^{\infty} [e^{at} e(t, q)]^2 dt, \quad a > 0 \text{ je volitelný parametr} \quad (9.13)$$

Protože platí $L\{e^{at}e(t, q)\} = E(p-a, q) = E_2(p, q)$,

regulátor navrhujeme pro kritérium

$$J(q) = \int_0^{\infty} [e^{-at}e(t, q)]^2 dt = \frac{1}{2p} \int_{-j\infty}^{j\infty} E_2(p, q)E_2(-p, q)dp; \quad E_2(p, q) = \frac{l(p-a, q)}{r(p-a, q)} \quad (9.14)$$

Poznámka 9.2.:

V diskrétní verzi je ISE kritérium v součtovém tvaru: $J(q) = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(k, q)$.

Parsevalův vztah má tvar: $J(q) = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(k, q) = \frac{1}{2p} \oint_{\Gamma} E(z, q)E(z^{-1}, q)z^{-1}dz$.

Integrační křivkou Γ může být jednotková kružnice, která obkličuje stabilní póly v z -rovině, výpočet kritéria je však schůdnější při použití reziduální věty.

Optimální hodnoty q_i^* , $i = 1, \dots$ lze určit numerickými metodami parametrické optimalizace.

Analogický postup lze použít i pro kvadratické kritérium $J(q) = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(k, q) + ku^2(k, q)$.

Návrh regulátoru dle minima kriteria ITAE

Metoda návrhu regulátoru dle minima kritéria ITAE: $J(q) = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt$

byla vypracována Grahamem a Lathropem, kteří určili (v podstatě experimentálně) optimální hodnoty koeficientů v charakteristickém polynomu uzavřené regulační smyčky $a_z(p)$, a tedy „optimální“ tvar charakteristického polynomu $a_z^*(p)$ tak, aby kritérium ITAE nabývalo minimální hodnoty. Koeficienty polynomu $a_z^*(p)$ byly navíc parametrizovány netlumenou frekvencí w_n pro možnost zadání přibližné doby regulace T_{reg} . Pro stanovení w_n lze použít vztah

$$w_n = \frac{4.8}{T_{reg}x}, \quad x = 0.7 \div 0.8 \quad (9.15)$$

Metodu lze použít za následujících předpokladů:

1/ Přenos řízeného systému je typu $F_S(p) = \frac{b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{b(p)}{a(p)}$, nemá tedy

astatismus a nemá žádnou nulu.

2/ Referenčním signálem $w(t)$ je po částech konstantní funkce.

3/ Regulátorem je ideální PID regulátor s parametry $q = \{K, K_I, K_D\}$.

„Optimální“ tvary $a_z^*(p)$ pro příslušný stupeň charakteristického polynomu uzavřené regulační smyčky $a_z(p, q)$ jsou uvedeny v tabulce:

| st $a_z(p, q)$ | „optimální“ tvar charakteristického polynomu $a_z^*(p)$ |
|----------------|---|
| 1 | $p + w_n$ |
| 2 | $p^2 + 1.4w_n p + w_n^2$ |
| 3 | $p^3 + 1.75w_n p^2 + 2.15w_n^2 p + w_n^3$ |
| 4 | $p^4 + 2.1w_n p^3 + 3.4w_n^2 p^2 + 2.7w_n^3 p + w_n^4$ |

Postup návrhu:

1/ Pro daný přenos řízeného systému $F_S(p) = \frac{b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{b(p)}{a(p)}$,

řízený ideálním PID regulátorem $F_R(p) = \frac{K_D p^2 + Kp + K_I}{p} = \frac{d(p,q)}{c(p)}$, $q = \{K, K_I, K_D\}$

určíme přenos uzavřené regulační smyčky s charakteristickým polynomem $a_z(p,q)$:

$$a_z(p,q) = a(p)c(p) + b(p)d(p,q)$$

2/ Z požadavku na T_{reg} určíme w_n a podle dosaženého stupně polynomu $a_z(p,q)$ určíme podle tabulky koeficienty příslušného polynomu $a_z^*(p)$.

3/ Položíme $a_z(p,q) = a_z^*(p)$ a hledané parametry regulátoru $q = \{K, K_I, K_D\}$ určíme porovnáním výrazů u stejných mocnin proměnné p .

Poznámka 9.3.:

Připomeňme, že v případě návrhu diskrétního PID regulátoru můžeme použít dva známé přístupy: Diskretizace navrženého spojitého ideálního PID regulátoru nebo přímý návrh diskrétního ideálního PID regulátoru (v tomto případě bychom museli určit „optimální“ polynom $a_z^*(z)$ např. využitím exaktního vztahu mezi póly spojitého a diskrétního systému – viz odst. 5.7.

Příklad 9.2:

K řízenému systému s přenosem $F_S(p) = \frac{1}{(p^2 + 1.5p + 0.5)}$ navrhnete ideální PID regulátor tak, aby bylo

minimalizováno kritérium ITAE a $T_{reg} \cong 6$ sec! Referenčním signálem bude $w(t) = 1[t]$.

(Je to modifikace předchozího příkladu s kritériem ISE. Systém uvažujeme bez astatismu, má ho ale regulátor PID)

Řešení dle uvedeného postupu:

1/ $a_z(p,q) = a(p)c(p) + b(p)d(p,q) = p^3 + (1.5 + K_D)p^2 + (0.5 + K)p + K_I$, st $a_z(p,q) = 3$

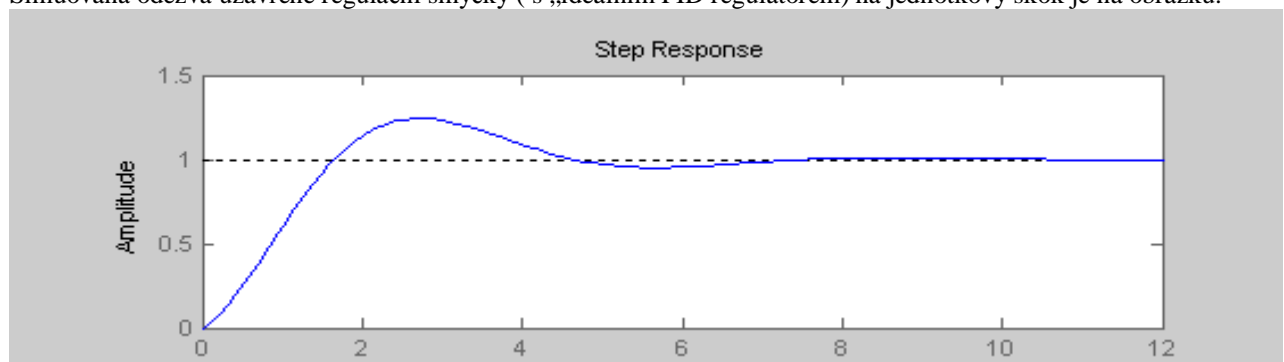
2/ $w_n = \frac{4.8}{T_{reg} \cdot x}$, volíme $x = 0.8 \Rightarrow w_n = 1 \text{ rad/sec} \Rightarrow a_z^*(p) = p^3 + 1.75p^2 + 2.15p + 1$

3/ Z porovnání $a_z(p,q) = a_z^*(p)$ dostáváme: $K = 1.65$, $K_I = 1$, $K_D = 0.25$

Navržený „ideální“ PID regulátor má přenos $F_R(p) = \frac{K_D p^2 + Kp + K_I}{p} = \frac{0.25p^2 + 1.65p + 1}{p}$

a přenos uzavřené regulační smyčky je $F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = \frac{0.25p^2 + 1.65p + 1}{p^3 + 1.75p^2 + 2.15p + 1}$

Simuovaná odezva uzavřené regulační smyčky (s „ideálním“ PID regulátorem) na jednotkový skok je na obrázku.



Poznámka 9.4.:

Tabelované „optimální“ tvary charakteristického polynomu $a_z^*(p)$ se mohou také použít při návrhu stavových regulátorů dle požadavku na umístitelnost pólů.

9.3. Návrh regulátorů s využitím GMK

Metodou geometrického místa kořenů (GMK) jsme se podrobně zabývali v odst. 4.5. (LS1). Ukázali jsme, že vhodným umístěním nul a pólů regulátoru k daným nulám a pólům řízeného systému lze měnit tvar GMK tak, aby se póly uzavřené regulační smyčky při určitém zesílení $K, K \in (0, \infty)$ otevřené regulační smyčky nacházely v takové oblasti komplexní roviny kořenů, která zaručí požadované vlastnosti dynamických odezev uzavřené regulační smyčky.

Metodu GMK budeme ilustrovat na řešeném příkladu návrhu dynamického regulátoru ke slabě tlumenému kmitavému systému druhého řádu.

Příklad 9.3:

K danému systému s přenosovou funkcí $F_S(p) = \frac{2}{p^2 + 0.4p + 1}$ (póly $p_{1,2} = -0.2 \pm j0.98$) (9.16)

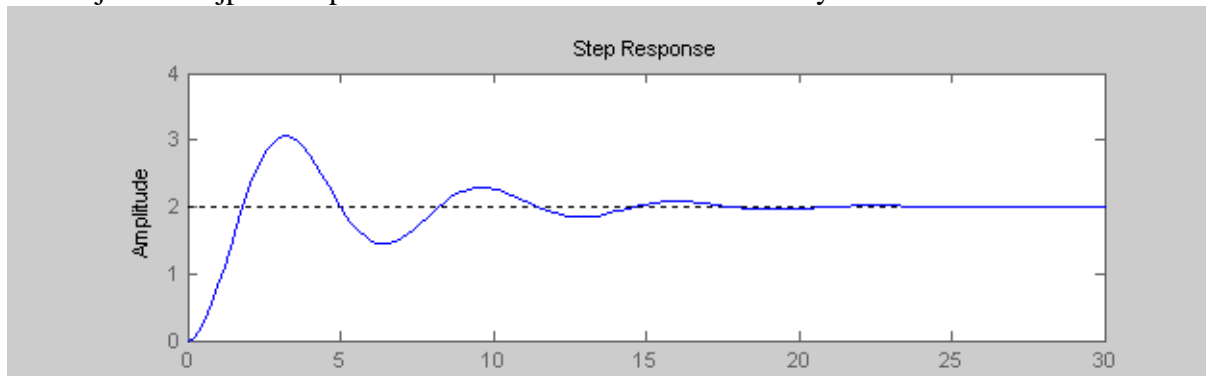
navrhněte PI nebo PID regulátor tak, aby pro přechodovou charakteristiku uzavřené regulační smyčky byly splněny požadavky:

Maximální relativní přeregulování $s_{\max} = 0.1$ (10%)

Doba regulace (tolerance $\pm 1\%$) $T_{\text{reg}} \leq 5 \text{ sec.}$ (9.17)

Na přechodové charakteristice uzavřené regulační smyčky ilustrujte splnění zadaných požadavků, určete bezpečnost v zesílení a ve fázi.

Podívejme se nejprve na přechodovou charakteristiku daného systému



Přechodová charakteristika vykazuje asi 50-ti procentní překmit ustálené hodnoty, přechodový proces se ustálí asi za 25 vteřin. Navrhovaný regulátor by měl obě tyto hodnoty výrazně zlepšit a výstup uzavřené regulační smyčky by se měl ustálit na hodnotě referenčního signálu $w(t) = 1[t]$.

Použijeme-li známé vztahy pro souvislost maximálního přeregulování s_{\max} a doby regulace $T_{\text{reg},1\%}$ s činitelem relativního tlumení x a netlumenou frekvencí w_n u kmitavého systému druhého řádu, dostáváme pro splnění zadaných požadavků požadované hodnoty x^* a w_n^* :

$$x^* \geq \frac{\left| \frac{\ln s_{\max}}{p} \right|}{\left| \sqrt{1 + \left(\frac{\ln s_{\max}}{p} \right)^2} \right|} = \frac{\left| \frac{\ln 0.1}{p} \right|}{\left| \sqrt{1 + \left(\frac{\ln 0.1}{p} \right)^2} \right|} = \frac{\left| \frac{-0.7329}{1.2398} \right|}{1} = 0.591 \Rightarrow x^* \cong 0.6$$

$$w_n^* \cong \frac{4.6}{x^* T_{\text{reg},1\%}} = \frac{4.6}{3} = 1.53 \text{ rad / sec.} \quad (9.18)$$

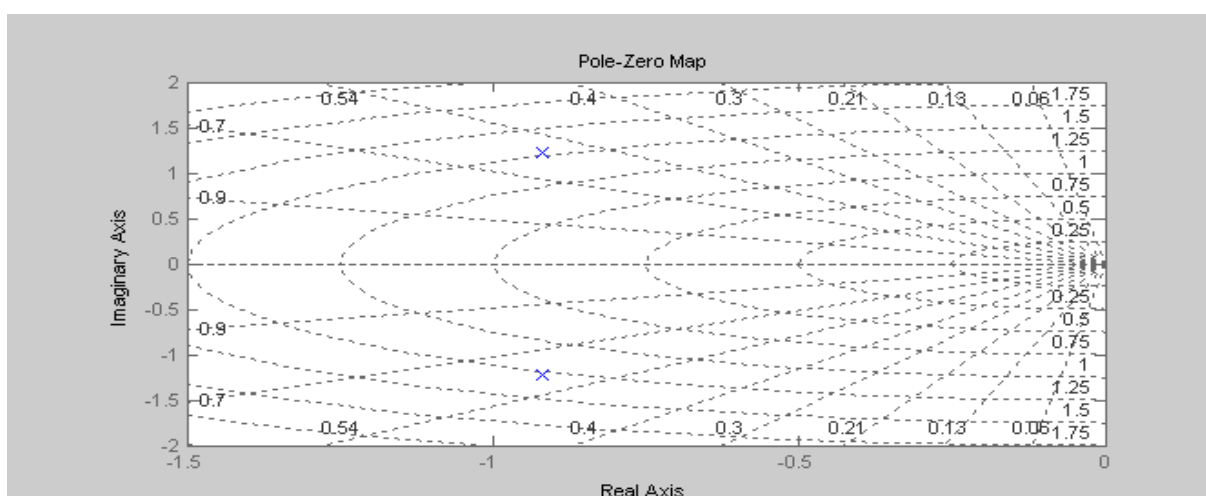
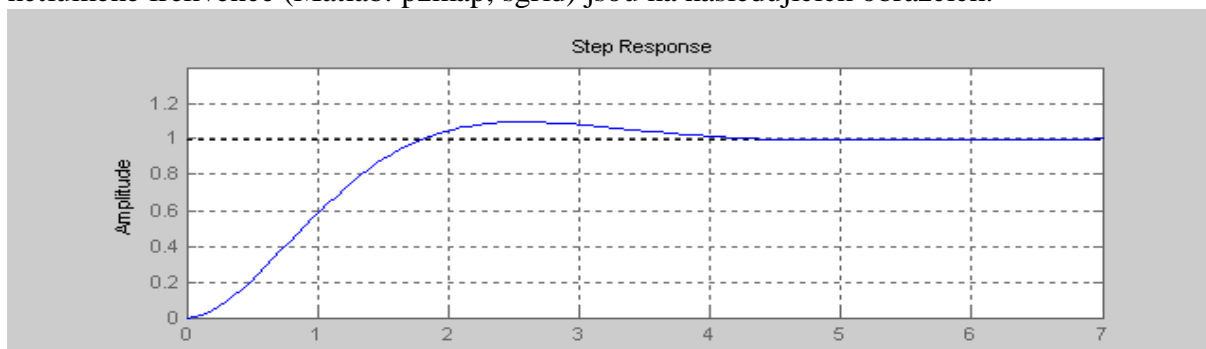
Můžeme tedy zapsat „požadovaný tvar přenosové funkce kmitavého systému druhého řádu“

$$F_S^*(p) = \frac{w_n^{*2}}{p^2 + 2x^* w_n^* p + w_n^{*2}} = \frac{2.3409}{p^2 + 1.836p + 2.3409} \quad (9.19)$$

$$\text{s póly } p_{1,2}^* = -x^* w_n^* \pm j w_n^* \sqrt{1 - x^{*2}} = -0.918 \pm j1.224 \quad (9.20)$$

Kdyby uzavřená regulační smyčka byla kmitavým systémem s přenosem $F_S^*(p)$, toto rozmístění pólů uzavřeného systému by garantovalo splnění zadaných požadavků na přeregulování a dobu regulace.

Přechodová charakteristika a umístění pólů $F_S^*(p)$ spolu s křivkami konstantního tlumení a netlumené frekvence (Matlab: pzmap, sgrid) jsou na následujících obrázcích:



Vyjdeme z předpokladu, že uzavřený systém vyššího řádu bude vykazovat podobný tvar přechodové charakteristiky, pokud jeho rozložení pólů bude obsahovat dva dominantní komplexně sdružené póly s podobným umístěním jako má „požadovaný tvar přenosové funkce kmitavého systému druhého řádu“ $F_S^*(p)$.

Vzhledem na požadovanou přesnost sledování konstantního (nebo po částech konstantního) referenčního signálu $w(t)$ je zřejmé, že otevřená regulační smyčka musí obsahovat astatismus. Protože řízený systém astatismus nemá, musí mít integrační složku regulátor a v úvahu připadá použití PI nebo PID regulátoru.

Analyzujme nejprve možnost použití PI regulátoru:

Přenos PI regulátoru je $F_R(p) = K \frac{\left(p + \frac{1}{T_I}\right)}{p}$ a do přenosu otevřené regulační smyčky přispěje jedním pólem v počátku a jednou, v podstatě libovolně umístitelnou nulou.

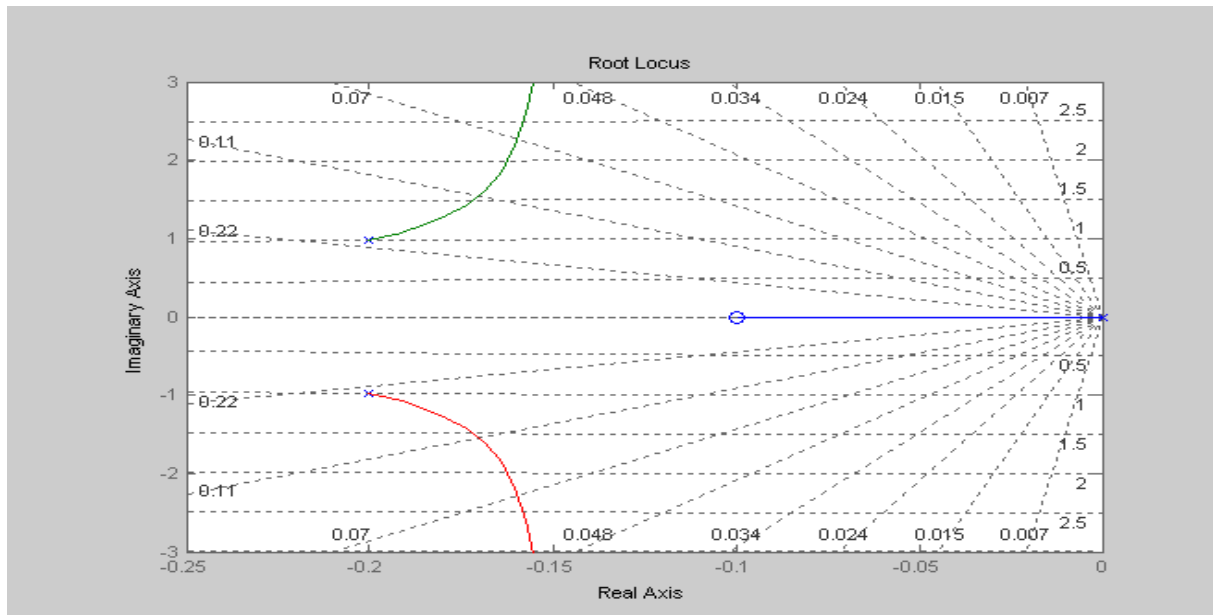
Daný systém (9.16) má komplexně sdružené póly: $p_{1,2} = -0.2 \pm j0.98$.

Zvolíme-li např. stabilní nulu PI regulátoru s hodnotou -0.1, dostaneme přenos otevřené regulační smyčky $F_o(p) = F_S(p)F_R(p) = K \frac{2(p+0.1)}{p(p^2+0.4p+1)}$.

Z tvaru geometrického místa kořenů na následujícím obrázku vidíme, že není možné ani při jiném výběru nuly docílit umístění dominantní dvojice komplexně sdružených pólů do „okolí“ požadovaných hodnot $x \cong 0.6$ a $w_n \cong 1.53 \text{ rad/sec}$.

Uzavřená smyčka bude vykazovat kmitavý a pomalý regulační proces, který nemůže zaručit splnění zadaných požadavků. Volba PI regulátoru tedy není vhodná.

Geometrické místo kořenů pro $F_o(p) = K \frac{2(p+0.1)}{p(p^2+0.4p+1)}$ s vyznačenými křivkami konstantního tlumení x a netlumené frekvence w_n u kmitavého členu II. řádu (Matlab: rlocus, sgrid):



Návrh spojitého PID regulátoru:

Uvažujme nejprve přenos *ideálního PID regulátoru*

$$F_R(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p \right) = \frac{K_D p^2 + K p + K_I}{p} = K_D \frac{p^2 + \frac{K}{K_D} p + \frac{K_I}{K_D}}{p} = K_D \frac{p^2 + d_1 p + d_0}{p} \quad (9.21)$$

s nastavitelnými parametry: K , $K_I = \frac{K}{T_I}$, $K_D = K T_D$.

Je zřejmé, že potřebujeme umístit dvě nuly regulátoru a specifikovat tak koeficienty d_1, d_0 jeho nulového polynomu. Určíme-li posléze z GMK zesílení K_D , zbývající parametry K, K_I určíme porovnáním polynomů v čitatelích: $\frac{K}{K_D} = d_1$, $\frac{K_I}{K_D} = d_0$. (9.22)

Připomeňme, že GMK vychází z pólů a končí v nulách otevřené regulační smyčky.

Nuly regulátoru je nutno zvolit tak, aby GMK probíhalo při konečném zesílení otevřené regulační smyčky $K_o = K_s K_D$ v „blízkém okolí“ požadovaného umístění pólů $p_{1,2}^* = -0.918 \pm j1.224$.

Zvolme nuly $z_{1,2} = -0.8 \pm j1$!

Nulový polynom PID regulátoru má tvar

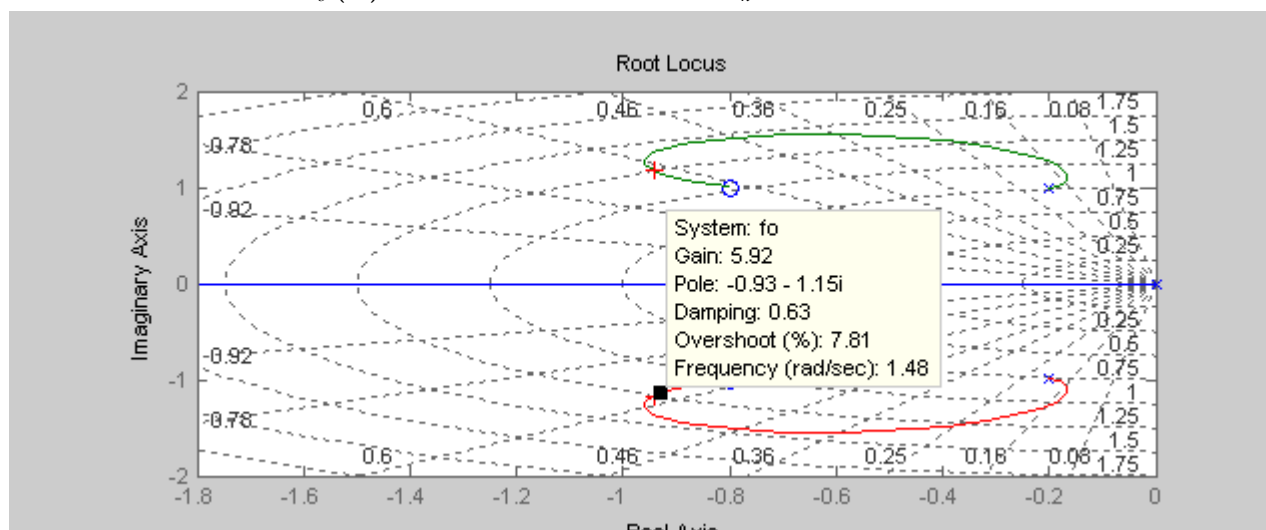
$$p^2 + d_1 p + d_0 = \prod_{j=1}^2 (p - z_j) = (p + 0.8 - j1)(p + 0.8 + j1) = p^2 + 1.6p + 1.64$$

a tudíž $d_1 = 1.6$, $d_0 = 1.64$ (9.23)

Nulový polynom přechází do přenosu otevřené regulační smyčky

$$F_o(p) = F_S(p)F_R(p) = \frac{2}{p^2 + 0.4p + 1} K_D \frac{p^2 + 1.6p + 1.64}{p} = K_o \frac{p^2 + 1.6p + 1.64}{p^3 + 0.4p^2 + p}, \quad K_o = 2K_D \quad (9.24)$$

Zakreslíme GMK pro $F_o(p)$ a křivky konstantního ζ , ω_n (Matlab: rlocus, sgrid, rlocfind):



V „blízkém okolí“ požadovaného umístění pólů $p_{1,2}^* = -0.918 \pm j1.224$ odečítáme (Matlab: rlocfind) zesílení otevřené smyčky $K_o = 2K_D = 5.92$, póly uzavřené smyčky jsou $p_{1,2} = -0.93 \pm j1.15$.

Z tvaru GMK vidíme, že tuto dvojici komplexně sdružených pólů lze považovat za dominantní a lze tudíž očekávat že chování uzavřeného systému vyššího řádu se nebude příliš lišit od chování kmitavého členu druhého řádu.

Z určeného zesílení otevřené smyčky dostáváme $K_D = K_o / 2 = 2.96$, zbylé dva parametry regulátoru K, K_I určíme podle (9.22) a (9.23): $K = K_D d_1 = 4.74$, $K_I = K_D d_0 = 4.85$.

Dostáváme přenos ideálního PID regulátoru:

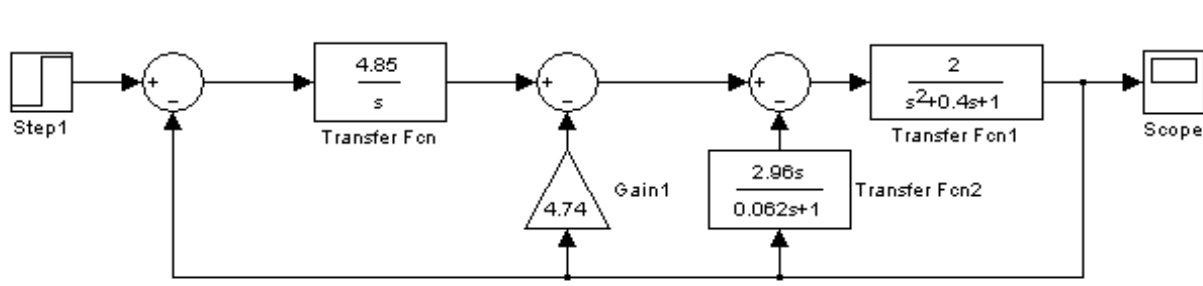
$$F_R(p) = K + \frac{K_I}{p} + K_D p = 4.74 + \frac{4.85}{p} + 2.96p \quad (9.25)$$

Ideální derivaci nahradíme aproximativní derivací s časovou konstantou t , jejíž velikost se doporučuje volit v závislosti na derivační časové konstantě T_D

$$K_D p \rightarrow \frac{K_D p}{t p + 1}, \quad t \cong T_D / (3 \div 20) \quad (9.26)$$

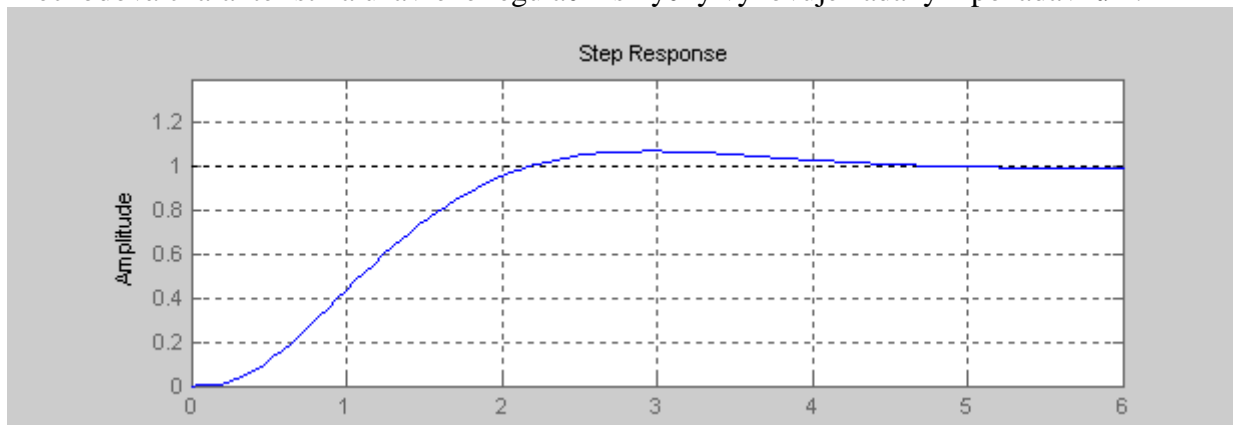
Protože $K_D = K T_D$, dostáváme $T_D = 0.62$ sec. a můžeme zvolit např. $t = T_D / 10 = 0.062$ sec.

Pro simulaci použijeme strukturu PID regulátoru s derivační a proporcionální složkou odvozenou od regulované veličiny (výstupu systému):

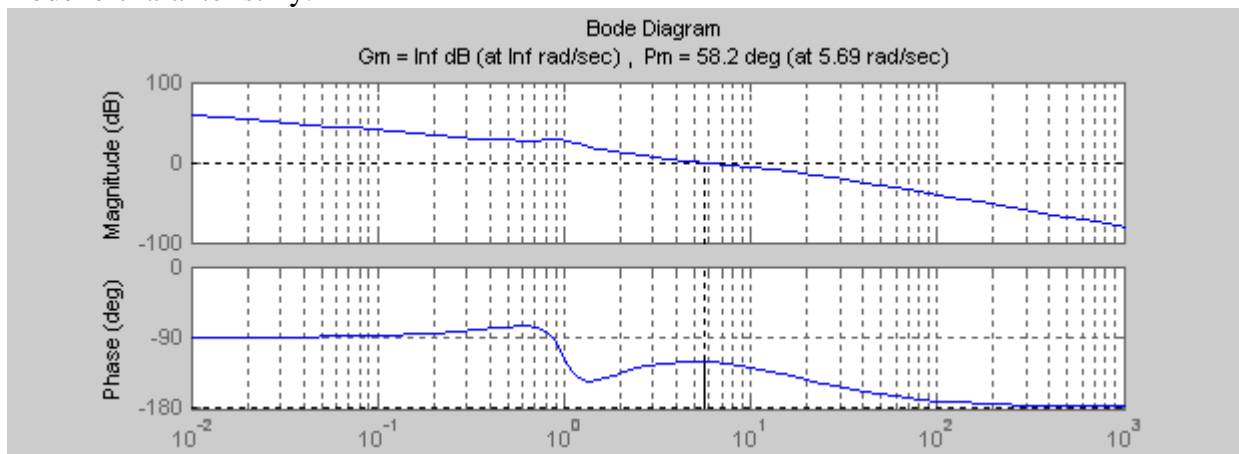


Všimněme si, že přenos uzavřené smyčky je v této struktuře $F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p) \frac{K_I}{p}}{1 + F_S(p) F_R(p)}$!

Přechodová charakteristika uzavřené regulační smyčky vyhovuje zadaným požadavkům:



Bodeho charakteristiky:



Simulace skokové odezvy s diskretizovaným spojitým PID regulátorem:

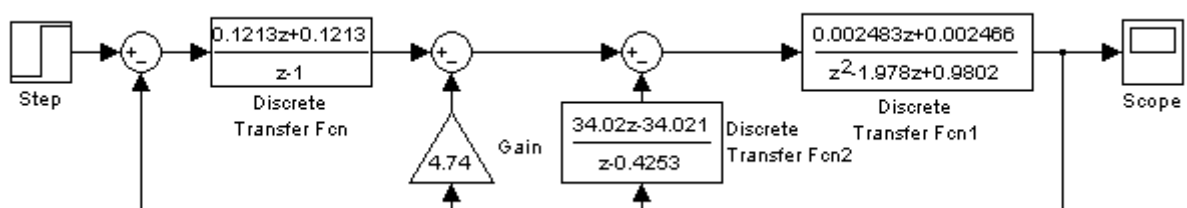
Zvolíme krátkou periodu vzorkování: $T = 0.05$ sec.

Pro účely simulace určíme diskrétní model spojitého systému $F_S(p) = \frac{2}{p^2 + 0.4p + 1}$

s tvarovačem nultého řádu: $F_S(z) = \frac{0.002483z + 0.002466}{z^2 - 1.978z + 0.9802}$

Navržený spojitý PID regulátor s přenosem $F_R(p) = K + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} = 4.74 + \frac{4.85}{p} + \frac{2.96 p}{0.062 p + 1}$

diskretizujeme *lichoběžníkovou aproximací* (Tustin): $F_R(z) = 4.74 + \frac{0.1213 + 0.1213}{z - 1} + \frac{34.02z - 34.02}{z - 0.4253}$



Při simulaci skokové odezvy zjistíme shodu v průběhu spojitě a diskrétní přechodové charakteristiky uzavřené regulační smyčky.

9.4. Návrh dynamických regulátorů dle požadovaného umístění pólů (nul) uzavřené regulační smyčky

Budeme analyzovat problém umístitelnosti pólů a nul dynamickými regulátory s ohledem na požadovaný tvar přenosu uzavřené regulační smyčky. Uvedeme pouze spojitou verzi, diskrétní verze je analogická.

Umístitelnost pólů a nul obecným dynamickým regulátorem s jedním stupněm volnosti (1DoF)

Uvažujme spojitý přenos systému n -tého řádu

$$F_s(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad \text{st } a(p) = n, \text{ st } b(p) \leq n-1 \quad (9.27)$$

a obecný dynamický regulátor m -tého řádu s přenosem

$$F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{d_m p^m + \dots + d_1 p + d_0}{p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \dots + c_1 p + c_0} = \frac{d(p)}{c(p)}, \quad \text{st } d(p) = \text{st } c(p) = m \quad (9.28)$$

který obsahuje $2m+1$ nastavitelných parametrů $q = \{d_0, d_1, \dots, d_m; c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\}$.

Přenos uzavřené regulační smyčky s 1DoF regulátorem má tvar

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_s(p)F_R(p)}{1 + F_s(p)F_R(p)} = \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} = \frac{b_z(p,q)}{a_z(p,q)}, \quad (9.29)$$

$a_z(p,q)$ je charakteristický polynom uzavřené smyčky, st $a_z(p,q) = n+m$, st $b_z(p,q) \leq n-1+m$

Navrhněme dynamický regulátor tak, aby uzavřená regulační smyčka měla požadované umístění pólů p_i^* , $i=1, \dots, n+m$, které vyjádříme **požadovaným tvarem charakteristického polynomu uzavřené regulační smyčky** $a_z^*(p)$

$$a_z^*(p) = \prod_{i=1}^{n+m} (p - p_i^*) = p^{n+m} + a_{n+m-1}^* p^{n+m-1} + \dots + a_1^* p + a_0^* \quad (9.30)$$

Hledejme odpověď na tři otázky:

- 1/ Jakého řádu m musí být regulátor pro požadované umístění pólů?
- 2/ Jaké jsou podmínky řešitelnosti a jak lze algoritmizovat návrh regulátoru?
- 3/ Jaká jsou omezení na volbu požadovaného tvaru přenosu uzavřené regulační smyčky, resp. na umístitelnost nul uzavřené regulační smyčky?

ad 1/ Porovnáním $a_z(p,q) = a_z^*(p)$ dostaneme $n+m$ rovnic pro $2m+1$ neznámých parametrů regulátoru. Parametry regulátoru lze jednoznačně určit při $m = n-1$ (*minimální řád regulátoru*).

Pro libovolné umístění pólů systému n -tého řádu stačí dynamický regulátor řádu $n-1$.

Uzavřená regulační smyčka má přenos řádu $n+m = 2n-1$ a je nutné umístit $2n-1$ pólů.

ad 2/ Je-li specifikován charakteristický polynom uzavřené regulační smyčky $a_z^*(p)$, hledané polynomy regulátoru $d(p), c(p)$ určíme řešením polynomiální Diofantické rovnice :

$$a(p)c(p) + b(p)d(p) = a_z^*(p) \quad (9.31)$$

$$\text{st } a(p) = n, \quad \text{st } b(p) \leq n-1, \quad \text{st } a_z^*(p) = 2n-1, \quad \text{st } c(p) = \text{st } d(p) = n-1$$

Věta 9-1: (Diofantická rovnice)

Diofantická rovnice má řešení tehdy a jen tehdy, když polynomy $a(p), b(p)$ jsou nesoudělné nebo jejich největší společný dělitel dělí $a_z^(p)$.*

*Obecně má Diofantická rovnice nekonečně mnoho řešení, jednoznačné řešení existuje, jestliže $\text{st } c(p) < \text{st } b(p)$ nebo $\text{st } d(p) < \text{st } a(p)$ splněno pro **minimální řád regulátoru $m = n-1$** .*

Poznámky k podmínkám řešitelnosti Diofantické rovnice.

1/ $a(p), b(p)$ jsou soudělné → existuje jejich největší společný dělitel $g(p) = \text{n.s.d.}(a(p), b(p))$.

Potom $a(p) = a_0(p)g(p)$, $b(p) = b_0(p)g(p)$, přičemž polynomy $a_0(p), b_0(p)$ jsou již nesoudělné: $\text{n.s.d.}(a_0(p), b_0(p)) = 1$.

Dosazením do Diofantické rovnice vidíme, že největší společný dělitel musí dělit $a_z^*(p)$:

$$[a_0(p)c(p) + b_0(p)d(p)]g(p) = a_z^*(p) \quad \text{resp.} \quad a_0(p)c(p) + b_0(p)d(p) = \frac{a_z^*(p)}{g(p)} = a_{z_0}^*(p)$$

Protože $g(p) = \text{n.s.d.}(a(p), b(p))$, musí také existovat polynomy $r(p), s(p)$ takové, že

$$a(p)r(p) + b(p)s(p) = g(p)$$

ze soudělnosti $a(p), b(p)$ vyplývá dělitelnost rovnice $g(p)$, při nesoudělnosti je $g(p) = 1$.

Po násobení rovnice výrazem $\frac{a_z^*(p)}{g(p)} = a_{z_0}^*(p)$ dostaneme Diofantickou rovnici ve tvaru

$$a(p)r(p)a_{z_0}^*(p) + b(p)s(p)a_{z_0}^*(p) = a_z^*(p) \quad \text{s řešením} \quad c(p) = r(p)a_{z_0}^*(p), \quad d(p) = s(p)a_{z_0}^*(p)$$

2/ $a(p), b(p)$ jsou nesoudělné → největší společný dělitel $g(p) = \text{n.s.d.}(a(p), b(p)) = 1$.

Potom existují polynomy $r(p), s(p)$ takové, že

$$a(p)r(p) + b(p)s(p) = 1 \quad \dots \quad (\text{Bezoutova rovnice})$$

Po násobení rovnice $a_z^*(p)$ dostaneme Diofantickou rovnici ve tvaru

$$a(p)r(p)a_z^*(p) + b(p)s(p)a_z^*(p) = a_z^*(p) \quad \text{s řešením} \quad c(p) = r(p)a_z^*(p), \quad d(p) = s(p)a_z^*(p)$$

Pokud má Diofantická rovnice řešení, má jich nekonečně mnoho – ovšem bez omezení na řád regulátoru, tj. pro libovolné stupně polynomů $d(p), c(p)$!

Nechť $d(p), c(p)$ označuje nějaké řešení Diofantické rovnice a $\tilde{d}(p), \tilde{c}(p)$ její obecné řešení.

Platí tedy $a(p)c(p) + b(p)d(p) = a_z^*(p)$ a $a(p)\tilde{c}(p) + b(p)\tilde{d}(p) = a_z^*(p)$

Odečtením rovnic dostaneme (při vynechání označení proměnné p):

$$a(\tilde{c} - c) + b(\tilde{d} - d) = 0 \quad \text{nebo} \quad g[a_0(\tilde{c} - c) + b_0(\tilde{d} - d)] = 0, \quad g \neq 0 \rightarrow \frac{\tilde{d} - d}{a_0} = -\frac{\tilde{c} - c}{b_0}.$$

Není-li omezen stupeň polynomů regulátoru, naznačená dělitelnost polynomy a_0, b_0 implikuje existenci libovolného polynomu $h(p)$ a obecné řešení Diofantické rovnice je dáno vztahy

$$\tilde{c}(p) = c(p) - b_0(p)h(p), \quad \tilde{d}(p) = d(p) + a_0(p)h(p) \quad (9.32)$$

Algoritmizace řešení Diofantické rovnice

Řešení $d(p), c(p)$ Diofantické rovnice $a(p)c(p) + b(p)d(p) = a_z^*(p)$ pro daný systém

$$F_s(p) = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} \quad \text{a regulátor} \quad F_R(p) = \frac{d_m p^m + \dots + d_1p + d_0}{p^m + c_{m-1}p^{m-1} + \dots + c_1p + c_0}, \quad m = n - 1$$

při požadovaném umístění pólů uzavřené regulační smyčky p_i^*

$$a_z^*(p) = \prod_{i=1}^{n+m} (p - p_i^*) = p^{n+m} + a_{n+m-1}^* p^{n+m-1} + \dots + a_1^* p + a_0^*,$$

Ize určit porovnáním výrazů u stejných mocnin proměnné p v Diofantické rovnici.

Porovnáním dostaneme $n+m$ rovnic pro $n+m = 2m+1$ parametrů regulátoru $\{c_0, \dots, c_{m-1}, d_0, \dots, d_m\}$, neboť *pro dynamický regulátor minimálního řádu platí $m = n-1$* .

Diofantickou rovnicí lze převést do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & \mathbf{L} & b_0 & 0 & 0 & \mathbf{L} \\ a_1 & a_0 & 0 & \mathbf{L} & \mathbf{L} & b_1 & b_0 & 0 & \mathbf{L} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \mathbf{L} & \mathbf{L} & b_2 & b_1 & b_0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \mathbf{M} & & & b_{n-1} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & & & 0 & b_{n-1} & & \\ 0 & 1 & a_{n-1} & & & \mathbf{M} & 0 & & \\ \mathbf{M} & 0 & 1 & & & & \mathbf{M} & & \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ c_{m-1} \\ d_0 \\ d_1 \\ \mathbf{M} \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ a_{m-1}^* \\ a_m^* - a_0 \\ a_{m+1}^* - a_1 \\ \mathbf{M} \\ a_{m+n-1}^* - a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (9.33)$$

přičemž čtvercová matice, sestavená z parametrů systému má rozměr $(m+n) \times (m+n)$.

Lze dokázat, že matice je regulární při nesoudělnosti systémových polynomů $a(p), b(p)$.

V matici je prvních m sloupců vytvářeno z koeficientů polynomu jmenovatele přenosu systému, dalších n sloupců je vytvářeno z koeficientů polynomu čitatele.

Hledané parametry regulátoru určíme řešením této maticové algebraické rovnice.

Jako příklad můžeme uvést návrh dynamického regulátoru z odstavce 7.10, kde byla zkoumána integrální omezení na dosažitelnou kvalitu regulace:

Příklad 7.5 (nestabilní pól-přeregulování):

Přenos řízeného systému je druhého řádu ($n = 2$): $F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p(p-1)} = \frac{p+2}{p^2-p} = \frac{b_1p+b_0}{p^2+a_1p+a_0}$

Pro umístění pólů použijeme dynamický regulátor 1. řádu ($m = n-1 = 1$): $F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{d_1p+d_0}{p+c_0}$

Požadované umístění pólů $p_{1,2,3}^* = -1$ determinuje požadovaný tvar charakteristického polynomu 3. stupně:

$$a_z^*(p) = \prod_{i=1}^{n+m=3} (p - p_i^*) = (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = p^3 + a_2^*p^2 + a_1^*p + a_0^*$$

Parametry regulátoru určíme řešením maticové algebraické rovnice (9.33) - :

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ 1 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* - a_0 \\ a_2^* - a_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.833 \\ 0.5 \\ 2.166 \end{bmatrix}$$

Regulátor pro požadované umístění pólů: $F_R(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{d_1p+d_0}{p+c_0} = \frac{2.166p+0.5}{p+1.833}$

ad 3/ 1DoF regulátor, navržený dle požadavku na umístění pólů, neumožňuje *nezávislé umístění nul* uzavřené regulační smyčky. Ty jsou v polynomu $b_z(p)$ fixovány jednak nulami řízeného systému a jednak nulami, které zavedl regulátor :

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} = \frac{b_z(p)}{a_z^*(p)} \quad (9.34)$$

Jedinou variantou, jak lze částečně ovlivnit umístění nul uzavřené regulační smyčky, je možnost navrhnout 1DoF regulátor tak, že způsobí *vykrácení stabilních nul* řízeného systému *vůči stabilním pólům* charakteristického polynomu uzavřené regulační smyčky $a_z(p)$.

To znamená, že stabilní nuly musí být součástí požadovaného umístění pólů - musí být obsaženy v požadovaném tvaru charakteristického polynomu $a_z^*(p)$.

Rozložíme „nulový“ polynom systému $b(p)$ na součin polynomů se stabilními a nestabilními nulami $b(p) = b^+(p)b^-(p)$ a upravíme požadovaný tvar charakteristického polynomu $a_z^*(p)$

$$a_z^*(p) = \bar{a}_z^*(p)b^+(p), \quad \text{st } a_z^*(p) = \text{st } \bar{a}_z^*(p) + \text{st } b^+(p) = 2n - 1 \quad (9.35)$$

Řešením Diofantické rovnice

$$a(p)c(p) + b(p)d(p) = \bar{a}_z^*(p)b^+(p) \quad (9.36)$$

určíme polynomy regulátoru $d(p), c(p)$ takové, že charakteristický polynom uzavřené regulační smyčky $a_z(p) = a(p)c(p) + b(p)d(p)$ obsahuje jednak póly $\bar{a}_z^*(p)$ a také póly $b^+(p)$, které se vykrátí se stabilními nulami polynomu $b(p)$ v čitateli přenosu uzavřené regulační smyčky.

Výsledný přenos uzavřené regulační smyčky bude

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = \frac{b^+(p)b^-(p)d(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} = \frac{b^-(p)d(p)}{\bar{a}_z^*(p)} \quad (9.37)$$

Volba požadovaného umístění pólů v přenosu uzavřené regulační smyčky $F_{y,w}(p)$ je při použití 1DoF regulátoru minimálního řádu omezena požadavkem $\text{st } a_z^(p) = 2n - 1$.*

Pokud nedopustíme krácení, je umístění nul v přenosu uzavřené regulační smyčky $F_{y,w}(p)$ fixováno nulami systému a nulami regulátoru.

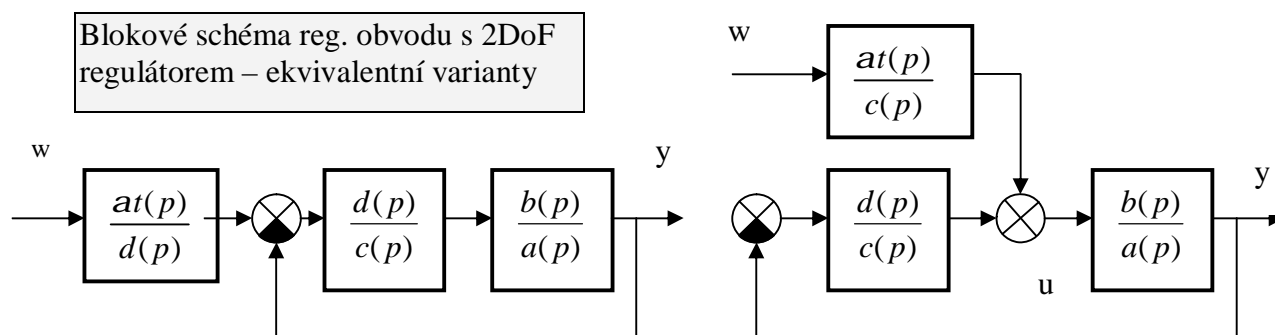
Připustíme-li krácení stabilních nul vůči pólům charakteristického polynomu uzavřené regulační smyčky $a_z(p)$, zachované póly v uzavřené regulační smyčce můžeme považovat za požadované póly reprezentované polynomem $\bar{a}_z^(p)$, který je nižšího stupně než $a_z^*(p)$, viz (9.35).*

Nuly jsou pouze redukovány a jejich umístění nelze ovlivnit nezávisle na umístění pólů.

Poznámka: Pokud se neomezíme na minimální řád regulátoru, stejné umístění pólů v uzavřené regulační smyčce lze docílit nekonečně mnoha regulátory, které určíme z obecného řešení Diofantické rovnice (9.32).

Umístitelnost pólů a nul obecným dynamickým regulátorem se dvěma stupni volnosti (2DoF)

Analyzujeme nyní problém umístitelnosti pólů a nul s použitím obecného dynamického regulátoru se dvěma stupni volnosti (2DoF regulátor), který byl zmíněn ve 4. kapitole.



Předpoklady:

- $a(p), b(p)$ jsou nesoudělné polynomy, $\text{st } a(p) = n$, $\text{st } b(p) \leq n - 1$
- regulátor je minimálního řádu, $\text{st } d(p) = \text{st } c(p) = n - 1$
- $t(p)$ je libovolný, stabilní monický polynom
- $\text{st } t(p) \leq \text{st } d(p)$, a je koeficient pro korekci zesílení.

Ze schéma vidíme, že 2DoF regulátor generuje řízení, sestávající z *přímovazební (kompenzační) a zpětnovazební složky*. Jeho L-obraz $U(p)$ je u obou variant realizace regulátoru dán výrazem

$$U(p) = \frac{at(p)}{c(p)}W(p) - \frac{d(p)}{c(p)}Y(p) \quad (9.38)$$

Přenos uzavřené regulační smyčky u obou variant regulátoru má shodný tvar

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{at(p)b(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} = \frac{b_z(p)}{a_z(p)} \quad (9.39)$$

Porovnáním s 1DoF regulátorem (9.29) vidíme, že charakteristické polynomy uzavřené regulační smyčky $a_z(p)$ jsou shodné, nyní je však v čitateli přenosu nahrazen polynom regulátoru $d(p)$ libovolným stabilním monickým polynomem $t(p)$, st $t(p) \leq st d(p)$.

Formulujeme-li úlohu umístitelnosti pólů, je nutné opět specifikovat požadovaný tvar charakteristického polynomu $a_z^*(p)$, st $a_z^*(p) = 2n - 1$.

Polynomy regulátoru $d(p), c(p)$ určíme řešením Diofantické rovnice (9.31), (9.33).

Volbou polynomu $t(p)$ lze zavést libovolné nuly do $b_z(p)$, pokud však řízený systém má nuly, zůstávají zachovány. Požadované umístění nul by muselo tuto skutečnost respektovat.

Připustíme-li krácení stabilních nul vůči pólům uzavřené smyčky, nabízí se dvě varianty návrhu 2DoF regulátoru:

1/ krácení stabilního polynomu $b^+(p)$ vůči $a_z(p)$

2/ krácení libovolného stabilního polynomu $t(p)$ vůči $a_z(p)$

V obou případech je nutné zahrnout stabilní nuly, které mají být vykráceny, do požadovaného tvaru charakteristického polynomu uzavřené smyčky $a_z^*(p)$

$$1/ \quad a_z^*(p) = \bar{a}_z^*(p)b^+(p) \qquad 2/ \quad a_z^*(p) = \bar{a}_z^*(p)t(p)$$

$$\text{přičemž musí platit } st a_z^*(p) = st \bar{a}_z^*(p) + st(b^+(p) \vee t(p)) = 2n - 1$$

a vyřešit příslušnou Diofantickou rovnici.

V první variantě bude mít přenos uzavřené regulační smyčky tvar (po vykrácení):

$$F_{y,w}(p) = \frac{at(p)b^+(p)b^-(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} = \frac{at(p)b^-(p)}{\bar{a}_z^*(p)} \left(= \frac{b_z^*(p)}{a_z^*(p)} \right) \quad (9.40)$$

Pokud má systém všechny nuly stabilní, lze docílit libovolné umístění pólů $\bar{a}_z^(p)$,*

st $\bar{a}_z^(p) = 2n - 1 - st b(p)$ a libovolné umístění nul $b_z^*(p) = t(p)$, st $b_z^*(p) \leq st d(p)$.*

Ve druhé variantě bude mít přenos uzavřené regulační smyčky tvar (po vykrácení):

$$F_{y,w}(p) = \frac{at(p)b(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} = \frac{ab(p)}{\bar{a}_z^*(p)} \left(= \frac{b_z^*(p)}{a_z^*(p)} \right) \quad (9.41)$$

Všimněme si, že při libovolné volbě $t(p)$, st $t(p) \leq d(p)$ dostáváme stejné přenosy $F_{y,w}(p)$!!

Výběrem $t(p)$ lze však nezávisle ovlivnit např. potlačení výstupní poruchy $v(t)$, neboť ke každému $t(p)$ určíme jinou dvojici polynomů $d(p), c(p)$, ovlivňující průběh citlivostní funkce $S(j\omega)$ - viz (7.22) a následující příklad.

Příklad 9.4:

K danému nestabilnímu systému s přenosem $F_S(p) = \frac{3}{p(p-1)} = \frac{b(p)}{a(p)}$ navrhnete 2DoF regulátor pro tři výběry kompenzačního polynomu $a/ t(p) = p + 0.2$ $b/ t(p) = p + 2$ $c/ t(p) = p + 20$ tak, aby přenos uzavřené regulační smyčky byl $F_{y,w}(p) = \frac{2.44}{p^2 + 2.4p + 2.44}$.

Řešení:

Protože systém je druhého řádu a požadujeme změnu pólů, bude zpětnovazební část dynamického regulátoru popsána přenosem prvního řádu : $F_R(p) = \frac{d_1 p + d_0}{p + c_0} = \frac{d(p)}{c(p)}$ a přímovazební část přenosem: $F_{R_k}(p) = \frac{a t(p)}{d(p)}$.

Charakteristický polynom uzavřené smyčky $a_z(p)$ je třetího stupně a požadovaný tvar charakteristického polynomu druhého stupně získáme po krácení (9.41).

Položíme $a_z^*(p) = \bar{a}_z^*(p)t(p) = (p^2 + 2.4p + 2.44)t(p)$ a pro zvolená $t(p)$ určíme řešení diofantické rovnice $p(p-1)(p+c_0) + 3(d_1 p + d_0) = (p^2 + 2.4p + 2.44)t(p)$.

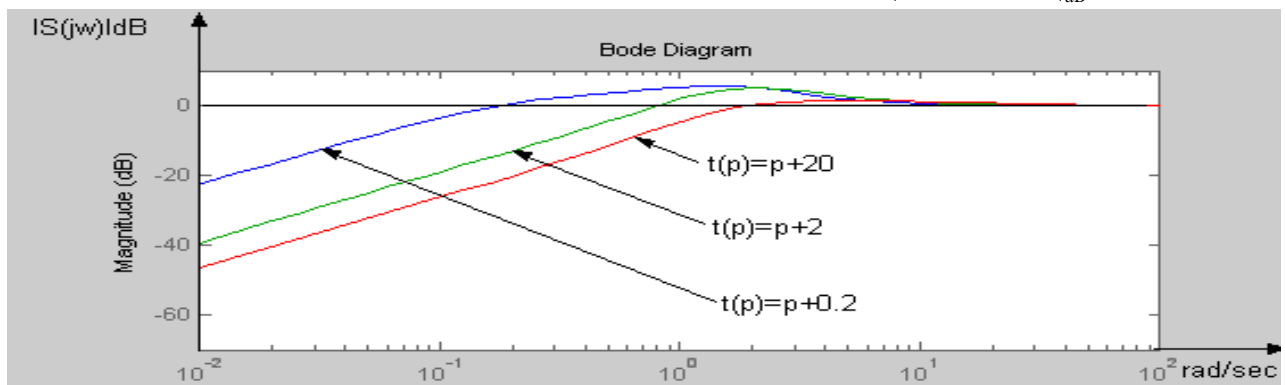
Pro $t(p) = p + 0.2$ je řešení: $d(p) = 2.17p + 0.163$, $c(p) = p + 3.6$

Pro $t(p) = p + 2$ je řešení : $d(p) = 4.21p + 1.63$, $c(p) = p + 5.4$

Pro $t(p) = p + 20$ je řešení : $d(p) = 24.61p + 16.26$, $c(p) = p + 23.4$

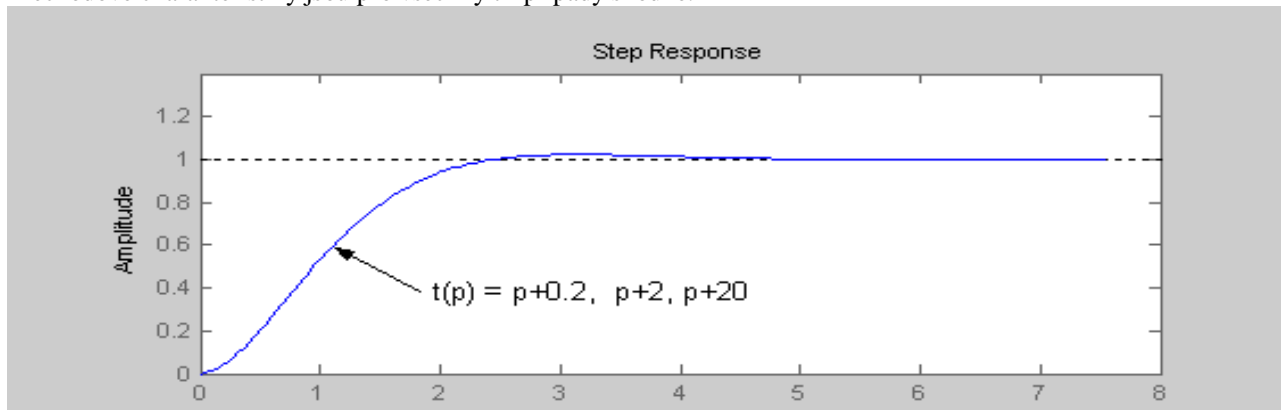
Korekci statického zesílení a určíme podle (9.41): $\forall t(p)$ musí platit $3a = 2.44 \Rightarrow a = 0.813$

Průběhy logaritmických amplitudových frekvenčních charakteristik $|S(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{a(j\omega)c(j\omega)}{a_z^*(j\omega)} \right|_{dB}$:



Z průběhů $|S(j\omega)|_{dB}$ zjistíme, že větší potlačení nízkofrekvenčních poruch nastává při vyšší hodnotě stabilní nuly zavedené kompenzačním polynomem $t(p)$.

Přechodové charakteristiky jsou pro všechny tři případy shodné.

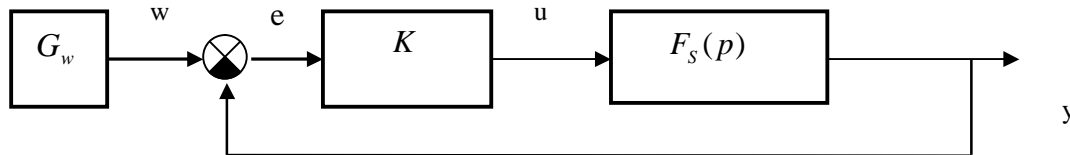


9.5. Množina stabilizujících regulátorů, afinní parametrizace

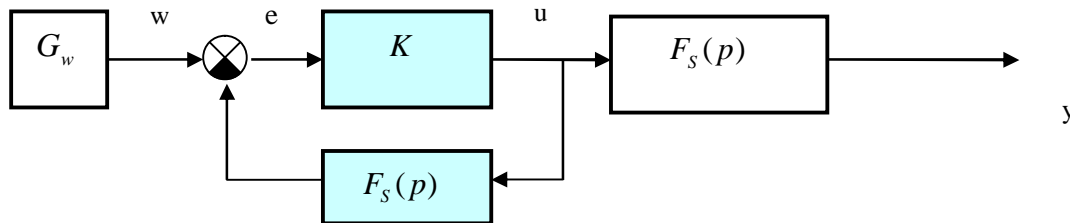
V dalším se budeme zabývat návrhem *stabilizujících regulátorů*, které využívají *inverzní model řízeného systému* a ukážeme, že lze nalézt úplnou množinu takových regulátorů.

Budeme prozatím předpokládat, že řízený systém je *stabilní, minimálně-fázový* a že nominální model řízeného systému je popsán *striktně ryzí (relativní řád ≥ 1) přenosovou funkcí $F_S(p)$* .

Pro další motivaci si nejprve všimneme regulačního obvodu s proporcionálním regulátorem s vysokým zesílením K :

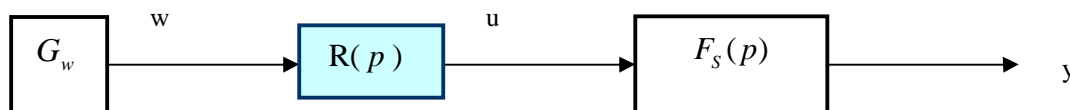


Ukážeme, že regulační obvod s proporcionálním regulátorem a jednotkovou zpětnou vazbou odpovídá při $K \rightarrow \infty$ přímovazebnímu regulačnímu obvodu, kde *regulátor je inverzí přenosu řízeného systému*. Schéma překreslíme do ekvivalentní struktury



Pro obě schémata platí :
$$F_{y,w}(p) = \frac{KF_S(p)}{1 + KF_S(p)} \quad (9.42)$$

Druhé schéma překreslíme zavedením „přímovazebního regulátoru“ $R(p) = \frac{K}{1 + KF_S(p)}$:



Při $K \rightarrow \infty$ se přenos regulátoru $R(p)$ rovná „*exaktní inverzi*“ přenosu řízeného systému

$$\lim_{K \rightarrow \infty} R(p) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + KF_S(p)} = [F_S(p)]^{-1} \quad (9.43)$$

Přenos uzavřené regulační smyčky je v této struktuře vyjádřen součinem přenosu systému a přenosu „přímovazebního regulátoru“ : $F_{y,w}(p) = F_S(p)R(p)$.

Při $K \rightarrow \infty$ bychom dostali $F_{y,w}(p) = F_S(p)[F_S(p)]^{-1} = 1$, což by z frekvenčního pohledu znamenalo *žádoucí jednotkové zesílení frekvenčního přenosu uzavřené regulační smyčky pro všechny frekvence $w, w \in [0, \infty)$ a také nulové zesílení výstupních harmonických poruch (součet citlivostní a komplementární citlivostní funkce je 1)*.

To jsou sice ideální, ale nerealizovatelné požadavky, ať již z důvodu požadavku na $K \rightarrow \infty$ nebo obráceně, z požadavku na regulátor, který by měl být „*exaktní inverzí*“ přenosu řízeného systému. Přesto se budeme touto ideou zabývat a ukážeme, že za cenu náhrady „*exaktní inverze*“ nějakou „*aproximovanou inverzí*“ lze určit **parametrizovanou množinu všech stabilizujících regulátorů**.

Přímovazební regulační obvod se stabilním systémem:

Přenos od referenčního signálu $w(t)$ na regulovaný výstup je

$$F_{y,w}(p) = F_S(p)R(p) \quad (9.44)$$

- Přímovazební regulátor $R(p)$ je vzhledem k $F_{y,w}(p)$ v lineárním vztahu!
- $F_{y,w}(p)$ bude stabilní pro libovolný stabilní regulátor $R(p)$ s ryzí přenosovou funkcí.
- Při „přesném řízení“ by mělo být $F_{y,w}(j\omega) = 1$ v požadovaném frekvenčním pásmu. To lze splnit, jestliže v tomto frekvenčním pásmu bude přímovazební regulátor $R(j\omega)$ „exaktní inverzí“ přenosu systému $R(j\omega) = [F_S(j\omega)]^{-1}$.

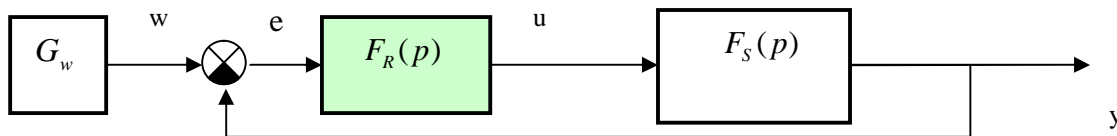
Protože „exaktní inverze“ přenosu systému nebude ryzím přenosem, je nutná její modifikace tvarovacím filtrem $F_Q(p)$ s volnými parametry, které umožní docílit požadovaný přenos $F_{y,w}(j\omega)$

$$R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1} \rightarrow F_{y,w}(p) = F_S(p)R(p) = F_S(p)F_Q(p)[F_S(p)]^{-1} = F_Q(p) \quad (9.45)$$

Zpětnovazební regulační obvod s regulátorem 1DoF:

Přenos od referenčního signálu $w(t)$ na regulovaný výstup je

$$F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} \quad (9.46)$$



- Zpětnovazební regulátor $F_R(p)$ je vzhledem k $F_{y,w}(j\omega)$ v nelineárním vztahu!

Parametrizace stabilizujících regulátorů (Youla-Kučera) - stabilní systémy

Porovnáním přenosů $F_{y,w}(p)$ v přímovazebním řízení (9.44) a zpětnovazebním řízení (9.46) dostáváme vzájemné vztahy mezi přímovazebním a zpětnovazebním regulátorem:

$$R(p) = \frac{F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} \quad \text{resp.} \quad F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)} \quad (9.47)$$

Zpětnovazební regulátor $F_R(p)$ je parametrizován přímovazebním regulátorem

$R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1}$ a definuje parametrizovanou množinu všech zpětnovazebních stabilizujících regulátorů $F_R(p)$ pro stabilní systém $F_S(p)$.

Zpětnovazební regulátor $F_R(p)$ zaručí pro libovolnou stabilní ryzí přenosovou funkci $R(p)$ a stabilní $F_S(p)$ vnitřní stabilitu regulačního obvodu, tj. stabilitu 4 přenosů:

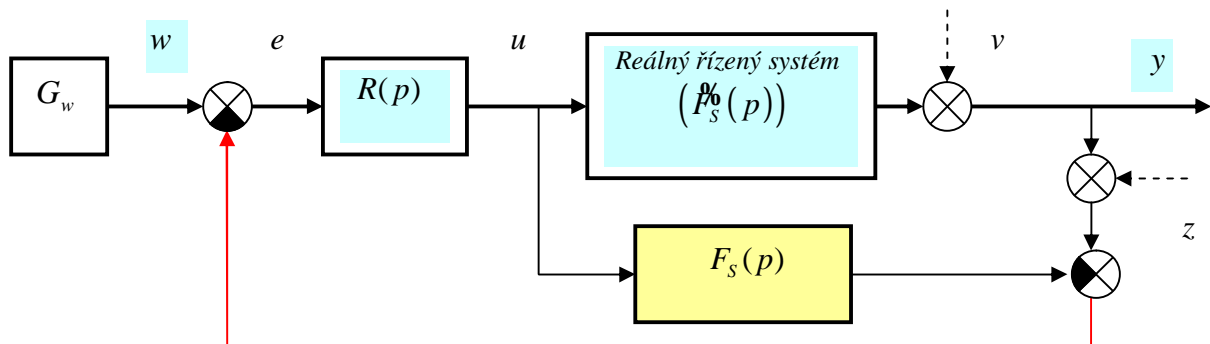
$$Q(p) \equiv F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = F_S(p)R(p) \quad (\text{komplementární citlivostní funkce})$$

$$S(p) \equiv F_{y,v}(p) = \frac{1}{1 + F_S(p)F_R(p)} = 1 - Q(p) = 1 - F_S(p)R(p) \quad (\text{citlivostní funkce})$$

$$F_{u,w}(p) = \frac{F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = R(p)$$

$$F_{y,u}(p) = \frac{F_S(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = S(p)F_S(p) = [1 - F_S(p)R(p)]F_S(p) \quad (9.48)$$

Přímovazební regulátor $R(p)$ navrhujeme pro nominální model $F_S(p)$ reálného řízeného systému S , řízení však realizujeme ve zpětnovazební struktuře regulačního obvodu zpětnovazebním regulátorem $F_R(p)$. Pro stabilní systémy lze kromě zpětnovazebního regulačního obvodu také použít strukturu řízení s vnitřním modelem systému:



Pokud by nominální model $F_S(p)$ byl přesným modelem reálného řízeného systému ($P_S^0(p)$), přenos v přímé větvi by odpovídal přenosu uzavřené regulační smyčky $F_{y,w}(p)$ a v případě nulových poruch v, z by **zpětná vazba** byla nulová...

Rekapitulace:

Přímovazební regulátor $R(p)$ je definován jako exaktní inverze přenosu řízeného systému $R(p) = [F_S(p)]^{-1}$.

Protože $R(p)$ má být ryzí přenosová funkce, korigujeme inverzi přenosu $[F_S(p)]^{-1}$ tvarovacím filtrem $F_Q(p)$ s nastavitelnými parametry, které určujeme z požadavků na přenos uzavřené regulační smyčky.

Regulátor $R(p)$, jako „exaktní inverze“ přenosu řízeného systému, je tak nahrazen „aproximovanou inverzí“

$$R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1}. \quad (9.49)$$

Řízení je realizováno parametrizovaným stabilizujícím zpětnovazebním regulátorem $F_R(p)$, v případě stabilních systémů lze použít strukturu „řízení s vnitřním modelem systému“ (viz dále).

Tento přístup lze rozšířit na systémy vyššího řádu, systémy s dopravním zpožděním a také na nestabilní systémy.

Parametrizovaný stabilizující zpětnovazební regulátor pro stabilní aperiodický systém I. řádu

Navrháme k řízenému systému $F_S(p) = \frac{K}{pT+1}$ parametrizovanou množinu zpětnovazebních

stabilizujících regulátorů $F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)}$, parametrizovanou $R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1}$.

1. Zvolme nejjednodušší $F_Q(p) = \frac{1}{ap+1}$ - pouze s jedním volným parametrem a .

2. Přímovazební regulátor: $R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1} = \frac{1}{ap+1} \frac{pT+1}{K} = \frac{pT+1}{K(ap+1)}$

3. Parametrizovaná množina zpětnovazebních stabilizujících regulátorů:

$$F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)} = \frac{\frac{pT+1}{K(ap+1)}}{1 - \frac{K}{pT+1} \frac{pT+1}{K(ap+1)}} = \frac{pT+1}{Kap} = \frac{T}{Ka} + \frac{1}{Kap}$$

Jedná se o PI regulátor, parametrizovaný parametrem a .

Nastavení parametru a je v přímém vztahu k požadované kvalitě regulačního procesu.

Pro přenos referenčního signálu na výstup v uzavřené smyčce (komplementární citlivostní funkce $Q(p)$) dostaneme

$$Q(p) \equiv F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = F_S(p)R(p) = F_Q(p) = \frac{K}{pT+1} \frac{pT+1}{K(a p+1)} = \frac{1}{a p+1}$$

Parametr a lze určit např. z požadované doby regulace, ale také by mohl být určen z požadavku na potlačení výstupní poruchy, tj. požadavkem na průběh na citlivostní funkce $S(p) = 1 - Q(p)$ apod.

Parametrizovaný stabilizující zpětnovazební regulátor pro stabilní kmitavý systém II. řádu :

Navrháme k řízenému systému $F_S(p) = \frac{K_s}{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}$ parametrizovanou množinu zpětno-

vazebních stabilizujících regulátorů $F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)}$,

parametrizovanou $R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1}$.

1/ Pro zajištění ryzosti $R(p)$, zvolme $F_Q(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$ s volnými parametry a_1, a_2 .

2/ Přímovazební regulátor: $R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1} = \frac{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}{K_s (a_2 p^2 + a_1 p + 1)}$

3/ Parametrizovaná množina zpětnovazebních stabilizujících regulátorů:

$$F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)} = \frac{\frac{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}{K_s (a_2 p^2 + a_1 p + 1)}}{1 - \frac{K_s}{p^2 + 2xw_n p + w_n^2} \frac{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}{K_s (a_2 p^2 + a_1 p + 1)}} = \frac{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}{K_s a_1 p \left(\frac{a_2}{a_1} p + 1 \right)}$$

Přenos $F_R(p)$ odpovídá PID regulátoru s přenosem

$$F_R(p) = K + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} = \frac{(K t + K_D) p^2 + (K + K_I t) p + K_I}{p(t p + 1)}$$

Porovnáním obou přenosů určíme parametry PID regulátoru:

$$K = \frac{2xw_n a_1 - a_2 w_n^2}{K_s a_1^2}, \quad K_I = \frac{w_n^2}{K_s a_1}, \quad K_D = \frac{a_1^2 - 2xw_n a_1 a_2 + a_2^2 w_n^2}{K_s a_1^3}, \quad t = \frac{a_2}{a_1}$$

Množina všech stabilizujících PID regulátorů je parametrizována parametry a_1, a_2 a můžeme je určit např. z požadavku na tvar přenosu uzavřené regulační smyčky

$$Q(p) \equiv F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = F_S(p)R(p) = F_Q(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} = \frac{\frac{1}{a_2}}{p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{1}{a_2}}$$

Požadovaný tvar přenosu uzavřené regulační smyčky jako kmitavého systému druhého řádu zapíšeme v obvyklém tvaru pomocí relativního činitele tlumení x^* a netlumené frekvence w_n^*

$$F_{y,w}(p) = \frac{\frac{1}{a_2}}{p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{1}{a_2}} = \frac{w_n^{*2}}{p^2 + 2x^* w_n^* p + w_n^{*2}} \quad a_2 = \frac{1}{w_n^{*2}}, \quad a_1 = \frac{2x^*}{w_n^*}$$

Nyní můžeme použít např. známé vztahy pro požadovanou dobu regulace T_{reg} a maximální přeregulování s_{max} a určit požadovaná w_n^* a x^* . Z těchto veličin určíme odpovídající hodnotu parametrů a_1, a_2 a po jejich dosazení do parametrů PID regulátoru získáme jeho přenos.

Příklad 9.5 (stejně zadání jako v Příkladu 9.3):

K systému s přenosem $F_S(p) = \frac{K_s}{p^2 + 2xw_n p + w_n^2} = \frac{2}{p^2 + 0.4p + 1}$ navrhnete parametrizovanou množinu

stabilizujících zpětnovazebních regulátorů $F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)}$, parametrizovanou

$R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1}$ tak, aby přechodová charakteristika uzavřené regulační smyčky vykazovala:

Maximální přeregulování $s_{max} = 0.1$ (10%)

Dobu regulace (tolerance $\pm 1\%$)..... $T_{reg} \leq 5$ sec.

1/ Zvolme $F_Q(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$ s volnými parametry a_1, a_2 .

2/ Přímovazební regulátor: $R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1} = \frac{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}{K_s (a_2 p^2 + a_1 p + 1)}$

3/ Parametrizovaná množina zpětnovazebních stabilizujících regulátorů:

$$F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)} = \frac{\frac{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}{K_s (a_2 p^2 + a_1 p + 1)}}{1 - \frac{K_s}{p^2 + 2xw_n p + w_n^2} \frac{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}{K_s (a_2 p^2 + a_1 p + 1)}} = \frac{p^2 + 2xw_n p + w_n^2}{K_s (a_2 p^2 + a_1 p)}$$

Parametrizované přenosy $F_R(p)$ odpovídají PID regulátoru

$$F_R(p) = K + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} = \frac{(Kt + K_D) p^2 + (K + K_I t) p + K_I}{p(t p + 1)}$$

Z porovnání obou přenosů dostáváme vztahy pro výpočet parametrů PID regulátoru

$$K = \frac{2xw_n a_1 - a_2 w_n^2}{K_s a_1^2}, \quad K_I = \frac{w_n^2}{K_s a_1}, \quad K_D = \frac{a_1^2 - 2xw_n a_1 a_2 + a_2^2 w_n^2}{K_s a_1^3}, \quad t = \frac{a_2}{a_1}$$

Konkrétní hodnoty parametrů a_1, a_2 určíme z požadovaného tvaru přenosu uzavřené regulační smyčky

$$F_{y,w}^*(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = F_S(p)R(p) = F_Q(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} = \frac{\frac{1}{a_2}}{p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{1}{a_2}}$$

Požadovaný tvar přenosu uzavřené regulační smyčky (\equiv přenos tvarovacího filtru $F_Q(p)$)

zapíšeme v obvyklém tvaru pomocí požadovaného relativního činitele tlumení x^* a netlumené frekvence w_n^* .

$$F_{y,w}^*(p) \equiv F_Q(p) = \frac{\frac{1}{a_2}}{p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{1}{a_2}} = \frac{w_n^{*2}}{p^2 + 2x^* w_n^* p + w_n^{*2}}, \quad a_2 = \frac{1}{w_n^{*2}}, \quad a_1 = \frac{2x^*}{w_n^*}$$

Nyní použijeme známé vztahy pro požadovanou dobu regulace T_{reg} a maximální přeregulování S_{max} a určíme požadované w_n^* a x^* :

$$x^* \geq \frac{\left| \frac{\ln S_{max}}{p} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln S_{max}}{p} \right)^2}} = \frac{\left| \frac{\ln 0.1}{p} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln 0.1}{p} \right)^2}} = \frac{|-0.7329|}{1.2398} = 0.591, \quad w_n^* \geq \frac{4.6}{x^* T_{reg,1\%}} = \frac{4.6}{3} = 1.53 \text{ rad/sec.}$$

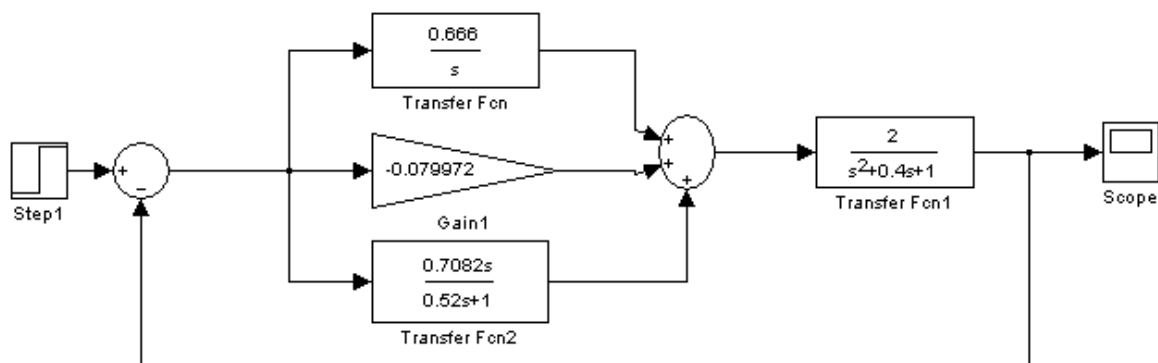
Zvolíme $x^* = 0.6$ a $w_n^* = 1.6 \text{ rad/sec.}$

Výpočtem dostaneme: $a_1^* = \frac{2x^*}{w_n^*} = \frac{1.2}{1.6} = 0.75$, $a_2^* = \frac{1}{w_n^{*2}} = \frac{1}{2.56} = 0.39$, $t = \frac{a_2^*}{a_1^*} = \frac{0.39}{0.75} = 0.52$

Parametry a_1^*, a_2^* dosadíme do parametrů regulátoru PID:

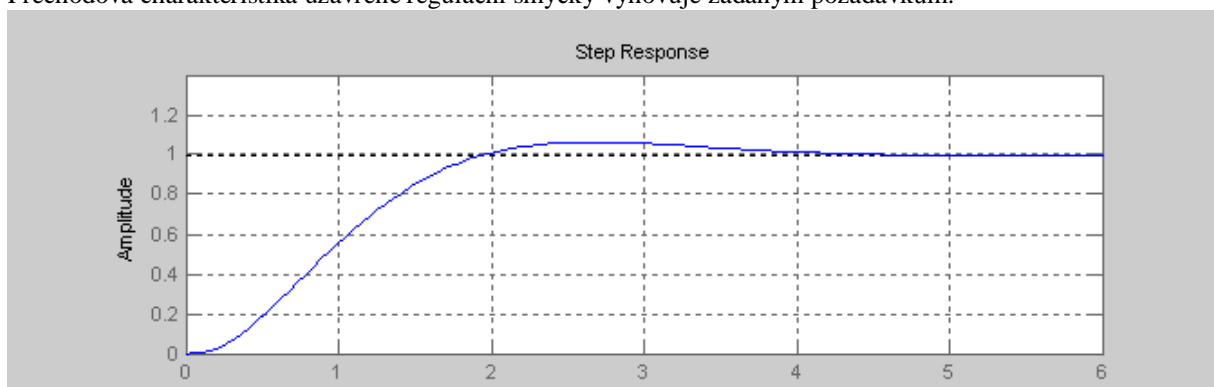
$$K = \frac{2xw_n a_1^* - a_2^* w_n^2}{K_s a_1^{*2}} = -0.08, \quad K_I = \frac{w_n^2}{K_s a_1^*} = 0.666, \quad K_D = \frac{a_1^{*2} - 2xw_n a_1^* a_2^* + a_2^{*2} w_n^2}{K_s a_1^3} = 0.664$$

Výsledný přenos PID regulátoru: $F_R(p) = K + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} = -0.08 + \frac{0.666}{p} + \frac{0.664 p}{0.52 p + 1}$



Oprava: v blokovém schéma je chybně uveden koeficient v derivační složce (správně $0.664s/(0.52s+1)$)

Přechodová charakteristika uzavřené regulační smyčky vyhovuje zadaným požadavkům:



Dále je žádoucí analyzovat: bezpečnost v zesílení a ve fázi, průběh citlivostní a komplementární citlivostní funkce a průběh GMK (viz návrh PID regulátoru – cvičení LS2).

Poznámky k robustnosti návrhu regulátoru pro kmitavý systém II. řádu :

Návrh regulátoru pro slabě tlumené systémy je obtížný ve smyslu dosažení určité míry robustnosti vůči změnám parametrů systému. Čím méně je systém tlumený, tím větší je převýšení na rezonanční frekvenci a tato skutečnost působí obtíže při návrhu robustního regulátoru.

Uvažujme reálnou situaci, kdy na základě určeného nominálního modelu systému $F_S(p)$ navrhujeme množinu stabilizujících regulátorů, které řídí *reálný systém s přenosem* $\hat{F}_S^{\%}(p)$, který ovšem neznáme (rozdílnost přenosů $\hat{F}_S^{\%}(p)$ a $F_S(p)$ může být způsobena například malou změnou v hodnotách parametrů).

Pro přenos uzavřené regulační smyčky s přenosem reálného řízeného systému $\hat{F}_S^{\%}(p)$ platí

$$F_{y,w}(p) = \frac{\hat{F}_S^{\%}(p)F_R(p)}{1 + \hat{F}_S^{\%}(p)F_R(p)} = \hat{F}_S^{\%}(p)R(p) \quad (9.50)$$

ovšem s tím, že regulátor $R(p)$ navrhujeme na základě znalosti *nominálního přenosu* $F_S(p)$

$$R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1} \quad (9.51)$$

Tuto skutečnost respektuje struktura s vnitřním modelem systému, kde přenos uzavřené smyčky má tvar

$$F_{y,w}(p) = \frac{\hat{F}_S^{\%}(p)R(p)}{1 + [\hat{F}_S^{\%}(p) - F_S(p)]R(p)} \quad (9.52)$$

ze kterého plyne rovnost vztahů (9.50) a (9.52) při $\hat{F}_S^{\%}(p) = F_S(p)$.

Po dosazení regulátoru (9.51) do (9.52) dostáváme pro přenos uzavřené regulační smyčky

$$F_{y,w}(p) = \frac{\hat{F}_S^{\%}(p)R(p)}{1 + [\hat{F}_S^{\%}(p) - F_S(p)]R(p)} = \frac{\hat{F}_S^{\%}F_QF_S^{-1}}{1 + [\hat{F}_S^{\%} - F_S]F_QF_S^{-1}} = \frac{\hat{F}_S^{\%}F_Q}{\hat{F}_S^{\%}F_Q + (1 - F_Q)F_S} \quad (9.53)$$

Protože by mělo platit $F_{y,w}(j\omega) = 1$ v relevantním frekvenčním pásmu, vyplývá z (9.53), že tvarovací filtr $F_Q(p)$ by měl být určen tak, aby ve frekvenčním pásmu, kde je odchylka $[\hat{F}_S^{\%}(j\omega) - F_S(j\omega)]$ malá, bylo dosaženo $F_Q(j\omega) = 1$.

Jinak řečeno, $|F_{y,w}(j\omega)| \cong 1$ bude platit na těch frekvencích, kde $|[1 - F_Q(j\omega)]F_S(j\omega)|$ je malé.

Parametrizace stabilizujících regulátorů (Youla-Kučera) - nestabilní systémy

Při analýze *vnitřní stability regulačního obvodu* (viz LS1, odst. 4.2.) s nestabilním systémem $F_S(p)$ a s 1DoF regulátorem $F_R(p)$ jsme ukázali, že se nelze „zbavit“ nestabilního pólu systému tím, že by byl vykrácen odpovídající nestabilní nulou regulátoru. V případě krácení by byl přenos mezi poruchou na vstupu systému a výstupem uzavřeného regulačního obvodu

$$F_{y,u}(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{F_S(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)}$$

nestabilní, tzn., že výstup by byl při působení poruchy na vstupu systému neomezený.

Nestabilní pól tudíž musí bez krácení přejít do přenosu otevřené smyčky $F_o(p) = F_S(p)F_R(p)$ a návrh zpětnovazebního regulátoru $F_R(p)$ potom zaručí *vnitřní stabilitu regulačního obvodu*.

Uvažujme **nestabilní systém** $F_S(p)$ a zabývejme se návrhem stabilizujících zpětnovazebních regulátorů $F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)}$, parametrizovaných regulátory $R(p) = F_O(p) [F_S(p)]^{-1}$.

Připomeňme, že přímovazební regulátory $R(p)$ parametrizují i čtyři základní přenosy

$$Q(p) \equiv F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = F_S(p)R(p) \quad (9.54)$$

$$S(p) \equiv F_{y,v}(p) = \frac{1}{1 + F_S(p)F_R(p)} = 1 - Q(p) = 1 - F_S(p)R(p) \quad (9.55)$$

$$F_{u,w}(p) = \frac{F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = R(p) \quad (9.56)$$

$$F_{y,u}(p) = \frac{F_S(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = S(p)F_S(p) = [1 - F_S(p)R(p)]F_S(p) \quad (9.57)$$

jejichž stabilita zaručuje *vnitřní stabilitu regulačního obvodu*.

Z (9.54) vidíme, že přenos uzavřené regulační smyčky je nestabilní, protože je také vyjádřen součinem nestabilního přenosu systému a přímovazebního regulátoru $F_{y,w}(p) = F_S(p)R(p)$.

Nestabilní póly je nutno odstranit z přenosu $F_{y,w}(p)$ uzavřené regulační smyčky a jedinou možností je zahrnutí nestabilních pólů systému v podobě nestabilních nul do přenosu regulátoru $R(p)$!

Tento postup lze použít pro odstranění jakýchkoliv nežádoucích pólů z přenosu uzavřené regulační smyčky, tedy i stabilních.

Připomeňme, že řízení bude realizováno zpětnovazebním regulátorem $F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)}$.

Zahrnutím nestabilních pólů v podobě nul do $R(p)$ dojde k jejich vykrácení:

- v součinu $F_S(p)R(p)$, tj. v komplementární citlivostní funkci $Q(p)$, viz (9.54)
- ve zpětnovazebním regulátoru $F_R(p)$
- v citlivostní funkci $S(p)$ (9.55).

Nestabilní póly však stále zůstávají v přenosu (9.57) mezi vstupem a výstupem systému v uzavřené regulační smyčce

$$F_{y,u}(p) = \frac{F_S(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = S(p)F_S(p) = [1 - F_S(p)R(p)]F_S(p)$$

Nestabilní póly je nutno odstranit i z přenosu (9.57) a jedinou možností je zahrnutí nestabilních pólů systému v podobě nestabilních nul i do citlivostní funkce $S(p) = [1 - F_S(p)R(p)]$, kde se vykrátí s póly $F_S(p)$.

Věta 9-2: (Omezení pro vyloučení nežádoucích pólů)

Uvažujme nominální zpětnovazební řízení s 1DoF regulátorem a předpokládejme, že systém obsahuje nežádoucí (stabilní či nestabilní) póly.

Platí:

1/ Všechny čtyři přenosy vnitřní stability (9.48) nebudou mít nežádoucí póly tehdy a jen tehdy,

když přenos $R(p)$ v regulátoru $F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)}$ bude vyhovovat omezením:

a/ $R(p)$ je ryzí, stabilní a má pouze žádoucí póly

b/ Jakýkoliv nežádoucí pól $F_S(p)$ je nulou $R(p)$, s přinejmenším stejnou násobností jako v $F_S(p)$.

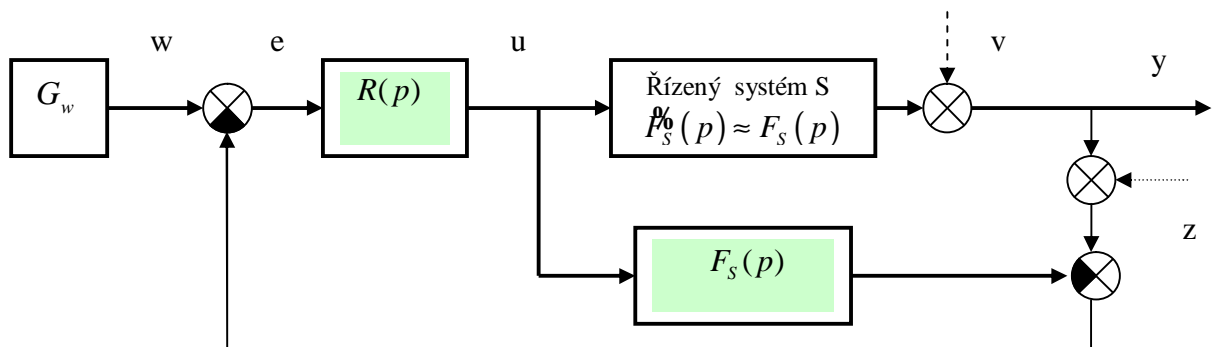
c/ Jakýkoliv nežádoucí pól $F_S(p)$ je nulou citlivostní funkce $S(p) = 1 - F_S(p)R(p)$ s přinejmenším stejnou násobností jako v $F_S(p)$.

2/ Jestliže podmínky b/ a c/ jsou splněny, potom krácení nestabilních nul a pólů v přenosu

$F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)}$ by mělo být provedeno **před** implementací zpětnovazebního

regulátoru, aby nevznikla vnitřní nestabilita.

Z tohoto důvodu nelze použít strukturu řízení s vnitřním modelem systému:



Ilustrativní příklad na odstranění nežádoucího (stabilního) pólu

Navrháme parametrizovaný stabilizující zpětnovazební regulátor pro řízení skokové odezvy

systému s přenosovou funkcí $F_S(p) = \frac{6}{(p+1)(p+6)}$. Předpokládejme, že působení výstupních

poruch nás omezuje na požadovanou šířku pásma regulace $w_s = 10 \text{ rad/sec}$.

Řešení:

Přenos regulátoru $R(p) = F_Q(p) \frac{(p+1)(p+6)}{6}$ závisí na volbě tvarovacího filtru $F_Q(p) \equiv F_{y,w}(p)$.

Relativní řád filtru vzhledem k požadavku na ryzí přenos $R(p)$ musí být 2.

Budeme snažit o výraznější potlačení zisku $|F_{y,w}(jw)|_{dB}$ na frekvencích $w \geq w_s = 10 \text{ rad/sec}$, požadujeme např. -60db/dek!

Zvolíme tedy tvarovací filtr třetího řádu, ale s relativním řádem 2:

$$F_Q(p) \equiv F_{y,w}(p) = 1000 \frac{bp+1}{(p^2+14p+100)(p+10)}$$

Vzhledem k požadavku na šířku pásma regulace je polynom ve jmenovateli tvarovacího filtru fixován, neobsahuje volné parametry a je zvolen jako součin stabilního faktoru 1. a 2. řádu. Zlomové frekvence byly zvoleny s hodnotou 10 rad/sec , činitel tlumení $\alpha = 0.7$.

Statické zesílení tvarovacího filtru (přenosu uzavřené regulační smyčky) je 1.

Výběrem volného parametru b se budeme zabývat později.

$$\text{Přenos regulátoru } R(p): \quad R(p) = F_Q(p)F_S(p)^{-1} = \frac{1000(bp+1)(p+1)(p+6)}{6(p^2+14p+100)(p+10)}$$

„Nejpomalejší“ pól systému je $p = -1$.

I když je stabilní, budeme jej vzhledem k našim požadavkům považovat za nežádoucí.

Tento pól je již jako stabilní nula obsažen v regulátoru $R(p)$ a krátí se s pólem v $F_S(p)$.

Všimněme si, že volba $F_Q(p)$ s jednotkovým zesílením při $w = 0$ ($F_Q(0) = 1$) znamená, že

$$R(0) = F_Q(0)F_S(0)^{-1} = F_S(0)^{-1}$$

a navrhovaný zpětnovazební regulátor $F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)}$ musí mít astatismus:

$$F_R(0) = \frac{R(0)}{1 - F_S(0)R(0)} = \frac{F_S(0)^{-1}}{1 - F_S(0)F_S(0)^{-1}} = \infty$$

Po dosazení za $R(p)$ do zpětnovazebního regulátoru dostaneme *parametrizovanou množinu stabilizujících zpětnovazebních regulátorů s astatismem*

$$F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)} = \frac{F_Q(p)F_S(p)^{-1}}{1 - F_Q(p)} = \frac{1000(bp+1)(p+1)(p+6)}{6p(p^2+24p+240-1000b)}$$

Výběr parametru b :

Aby pól $p = -1$ nezůstal v přenosu vstupní poruchy systému

$$F_{y,u}(p) = \frac{F_S(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = [1 - F_S(p)R(p)]F_S(p),$$

což by mělo za následek pomalé odregulování případných poruch na vstupu systému,

je nutné dále omezit $R(p)$ tak, aby $p = -1$ bylo nulou citlivostní funkce $S(p) = 1 - F_S(p)R(p)$.

Musíme tedy najít takové b , že

$$S(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad Q(-1) \equiv F_{y,w}(-1) = F_Q(-1) = 1 - S(-1) = 1$$

S použitím

$$F_Q(p) = F_{y,w}(p) = Q(p) = 1000 \frac{bp+1}{(p^2+14p+100)(p+10)}$$

dostáváme podmínku

$$F_Q(-1) = \frac{1000}{783}(1-b) = 1 \quad \rightarrow \quad b = \frac{217}{1000} = 0.217$$

Pro tuto hodnotu b lze jmenovatel přenosu regulátoru $F_R(p)$ faktorizovat a vykrátit $(p+1)$:

$$F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)} = \frac{1000(bp+1)(p+1)(p+6)}{6p(p^2+24p+240-1000b)} = \frac{217p^2+2302p+6000}{6p^2+138p}$$

Pól $p = -6$ bude neřiditelný referenčním signálem w (bude krácen s odpovídající nulou v regulátoru), ale bude řiditelný vstupní poruchou systému (nebude krácen v přenosu $F_{y,u}(p)$).

Parametrizace stabilizujících regulátorů (Youla-Kučera) - systémy s astatismem

Navrhneme parametrizovanou množinu zpětnovazebních regulátorů pro řízení skokové odezvy a potlačení konstantní poruchy na vstupu systému s přenosovou funkcí $F_S(p) = \frac{K_s}{p(pT+1)}$.

Nulový pól je nežádoucí v přenosu uzavřené smyčky, a proto podle Věty 9-2 zajistíme, aby nežádoucí pól $F_S(p)$ byl nulou $R(p)$ a nulou citlivostní funkce $S(p) = 1 - F_S(p)R(p)$.

Protože $F_S(p)$ nemá žádnou nestabilní nulu, můžeme v regulátoru $R(p) = F_Q(p)F_S(p)^{-1}$ použít „exaktní“ inverzi $F_S(p)^{-1} = \frac{p(Tp+1)}{K_s}$.

Přenos $R(p)$ musí být ryzí, a proto přenos tvarovacího členu $F_Q(p)$ bude mít relativní řád 2.

1/ Zvolme $F_Q(p) = F_{y,w}(p) = \frac{1}{a_2p^2 + a_1p + 1}$ s volnými parametry a_1, a_2 , $F_Q(0) \equiv Q(0) = 1$

$$\text{Přímovazební regulátor: } R(p) = F_Q(p) [F_S(p)]^{-1} = \frac{p(pT+1)}{K_s(a_2p^2 + a_1p + 1)}$$

Parametrizovanou množinu zpětnovazebních regulátorů dostáváme po krácení nuly a pólu:

$$F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)} = \frac{\frac{p(pT+1)}{K_s(a_2p^2 + a_1p + 1)}}{1 - \frac{K_s}{p(pT+1)} \frac{p(pT+1)}{K_s(a_2p^2 + a_1p + 1)}} = \frac{(pT+1)}{K_s(a_2p + a_1)}$$

Zpětnovazební regulátory však nebudou v ustáleném stavu kompenzovat konstantní poruchu na vstupu systému (přenos otevřené smyčky by měl mít astatismus 2. stupně!), protože přenos vstupní poruchy systému na výstup

$$F_{y,u}(p) = \frac{F_S(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = \frac{\frac{K_s}{p(pT+1)}}{1 + \frac{1}{p(a_2p + a_1)} \frac{K_s(a_2p + a_1)}{(a_2p^2 + a_1p + 1)(Tp+1)}}$$

nemá nulu v počátku, i když citlivostní funkce ji má: $S(p) = 1 - F_Q(p) = \frac{p(a_2p + a_1)}{a_2p^2 + a_1p + 1}$.

Kompenzaci skokové poruchy zařídíme takovou volbou tvarovacího filtru $F_Q(p)$, aby citlivostní funkce $S(p)$ měla dvě nuly v počátku. Potom i přenos vstupní poruchy systému na výstup bude mít jednu nulu v počátku a konstantní porucha na vstupu systému v ustáleném stavu regulovaný výstup neovlivní.

2/ Nejjednodušší volba tvarovacího filtru vedoucí k žádanému výsledku je

$$F_Q(p) \equiv Q(p) \equiv F_{y,w}(p) = \frac{a_1p + 1}{a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1}$$

Pro citlivostní funkci a pro přenos vstupní poruchy systému dostáváme

$$S(p) = 1 - F_Q(p) = \frac{p^2(a_3p + a_2)}{a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1}, \quad F_{y,u}(p) = \frac{Kp(a_3p + a_2)}{(a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1)(Tp + 1)}$$

Zpětnovazební regulátor má tvar

$$F_R(p) = \frac{R(p)}{1 - F_S(p)R(p)} = \frac{\frac{p(pT+1)(a_1p+1)}{K(a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1)}}{1 - \frac{K}{p(pT+1)} \frac{p(pT+1)(a_1p+1)}{K(a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1)}} = \frac{Ta_1p^2 + (T+a_1)p + 1}{Kp(a_3p + a_2)}$$

a jeho struktura odpovídá PID regulátoru

$$F_R(p) = K_p + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{t p + 1} = \frac{(K_p t + K_D) p^2 + (K_p + K_I t) p + K_I}{p(t p + 1)}$$

Porovnáním lze určit parametry PID regulátoru K_p , K_I , K_D , t . Parametry budou funkcemi parametrů systému a parametrů tvarovacího filtru – přenosu uzavřené regulační smyčky:

$$F_Q(p) = F_{y,w}(p) = \frac{a_1 p + 1}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}$$

Charakteristický polynom 3. stupně uzavřené regulační smyčky lze opět zvolit jako součin stabilního faktoru 1. a 2. řádu. Zlomové frekvence mohou být specifikovány z požadavku na šířku pásma regulace, činitel tlumení zvolíme.

Určením koeficientů a_1, a_2, a_3 charakteristického polynomu je určena i nula tvarovacího filtru..

Parametrizace stabilizujících regulátorů pro systémy s nežádoucími póly - zobecnění

V předchozím jsme viděli, že pro odstranění nežádoucích pólů systému, zejména z přenosu vstupní poruchy (nestabilní póly, málo tlumené póly), jsou nutná další omezení na regulátor $R(p)$.

Pro úplnost uveďme, že lze určit parametrizovaný zpětnovazební regulátoru $F_R(p)$ takový, že jsou automaticky splněny podmínky obsažené ve „*Věťe o omezeních pro odstranění nežádoucích pólů*“. Řešení uvádí následující věta (bez důkazu):

Věta 9-3: (Parametrizace regulátorů pro systémy s nežádoucími póly)

Uvažujme 1DoF regulátor $F_R(p)$ pro systém s přenosem $F_S(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$, $\text{g.c.d.}(a(p), b(p)) = 1$,

$a(p)$ obsahuje nežádoucí póly. Potom uzavřená smyčka bude *vnitřně stabilní* a všechny 4 přenosy

$$Q(p) \equiv F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = F_S(p)R(p)$$

$$S(p) \equiv F_{y,v}(p) = \frac{1}{1 + F_S(p)F_R(p)} = 1 - F_S(p)R(p)$$

$$F_{u,w}(p) = \frac{F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = R(p)$$

$$F_{y,u}(p) = \frac{F_S(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = [1 - F_S(p)R(p)] F_S(p)$$

budou obsahovat pouze *žádoucí póly* tehdy a jen tehdy, jestliže $F_R(p)$ bude parametrizováno

$$F_R(p) = \frac{\frac{s(p)}{f(p)} + H(p) \frac{a(p)}{g(p)}}{\frac{r(p)}{f(p)} - H(p) \frac{b(p)}{g(p)}}, \quad (9.58a)$$

přičemž : 1/ $H(p)$ je nějaká *ryzí stabilní přenosová funkce, která má pouze žádoucí póly*

2/ $s(p)$ a $r(p)$ jsou polynomy vyhovující **Diofantické rovnici** pro umístění pólů

$$a(p)r(p) + b(p)s(p) = g(p)f(p) \quad (9.58b)$$

3/ $g(p), f(p)$ jsou *libovolné polynomy vhodných stupňů s kořeny v žádoucí oblasti*.

Lze dokázat (Goodwin), že *Věta 9-3* klade na přímovazební regulátor $R(p)$ omezení

$$R(p) = \frac{a(p)}{f(p)} \left[\frac{s(p)}{g(p)} + H(p) \frac{a(p)}{g(p)} \right] \quad (9.58c)$$

9.6. Návrh regulátoru ze zadaného modelu přenosu uzavřené smyčky

Je-li specifikován požadavek na chování uzavřené regulační smyčky přímo zadaným modelem přenosu uzavřené regulační smyčky $F_M(p)$ a je-li znám přenos řízeného systému $F_S(p)$, potom zpětnovazební regulátor $F_R(p)$ lze určit porovnáním

$$F_{y,w}(p) = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = F_M(p)$$

a dostaneme

$$F_R(p) = \frac{1}{F_S(p)} \frac{F_M(p)}{1 - F_M(p)} \quad (9.59)$$

Součástí zpětnovazebního regulátoru je opět *inverzní model řízeného systému*, podobně jako v předchozím odstavci 9.5. Nyní je však model požadovaného přenosu uzavřené regulační smyčky $F_M(p)$ pevně zadán a není určen jako parametrizovaný tvarovací filtr $F_Q(p)$.

Aby bylo možné docílit požadovaný tvar přenosu uzavřené regulační smyčky $F_M(p)$, inverzní model systému obsažený v regulátoru musí „zrušit“ danou dynamiku řízeného systému.

Použití metody je tedy kriticky vázáno na znalost přesného modelu řízeného systému.

Vyjdeme-li z obvyklých předpokladů

$$F_S(p) = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad \text{st } b(p) < \text{st } a(p), \quad F_R(p) = \frac{d(p)}{c(p)}, \quad \text{st } d(p) = \text{st } c(p), \quad \text{je otázkou,}$$

zda je možná libovolná volba požadovaného přenosu $F_M(p) = \frac{b_M(p)}{a_M(p)}$, $\text{st } b_M(p) \leq \text{st } a_M(p)$,

vzhledem k podmínce ryzí přenosové funkce regulátoru: $\text{st } d(p) = \text{st } c(p)$.

Vyjádríme-li (9.59) pomocí definovaných polynomů, přenos regulátoru má tvar

$$F_R(p) = \frac{d(p)}{c(p)} = \frac{a(p)}{b(p)} \frac{b_M(p)}{a_M(p) - b_M(p)}. \quad (9.60)$$

Pro ryzí přenosovou funkci $F_R(p)$ je volba $F_M(p)$ omezena podmínkou rovnosti relativních řádů $F_S(p), F_M(p)$, případ neminimálně-fázového systému vede na nežádoucí nestabilní regulátor.

U diskrétní verze regulátoru s inverzním modelem řízeného systému dojdeme ke stejným závěrům a navíc se může objevit další problém:

Při diskretizaci spojitého $F_S(p)$ s tvarovačem 0. řádu často vznikají při krátké periodě vzorkování *stabilní nuly se zápornou reálnou částí*. V diskrétním regulátoru s inverzním modelem systému se tyto nuly systému stanou póly regulátoru a důsledkem je, že *regulátor generuje sice tlumené, ale oscilující řízení a regulační proces má kmitavý charakter*.

Diskrétní regulátor pro řízení skokové odezvy spojitého systému s minimálním počtem kroků

Uvažujme řízení skokové odezvy spojitého systému s přenosem $F_S(p)$ diskrétním regulátorem $F_R(z)$. Požadujeme, aby regulovaný výstup systému $y(t)$, $t = kT$, dosáhl požadované hodnoty $w(t) = 1[t]$ za konečný počet kroků regulace $k = N$ a setrval na této hodnotě $\forall k, k > N$.

To znamená, že regulační odchylka $e(k) = w(k) - y(k)$ musí přejít za konečný počet kroků do nuly, musí to tedy být *konečná sekvence popsaná polynomem konečného stupně*.

Položíme-li si otázku, jaký je minimální počet kroků regulace pro splnění tohoto požadavku, musíme respektovat zpoždění mezi vstupem a výstupem diskrétního modelu řízeného systému $F_S(z)$. Protože diskrétní model řízeného systému zahrnuje tvarovač 0. řádu, který zavádí zpoždění o velikosti periody vzorkování T , je minimálně dosažitelný počet kroků regulace $N_{\min} = 1$ (předpokládáme, že regulátor zpoždění nezavede). Bude-li mít daný systém navíc i dopravní

zpoždění t_d , které lze vyjádřit celistvým násobkem d periody vzorkování $t_d = dT$, musíme respektovat celkové zpoždění $q = N_{\min} + d$.

Z uvedeného vyplývá, že pro návrh diskrétního regulátoru pro **minimální počet kroků regulace** s inverzním modelem systému můžeme specifikovat požadavek na požadovaný přenos uzavřené regulační smyčky $F_M(p)$ ve tvaru

$$F_M(z) \equiv F_{y,w}(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = z^{-q} = \frac{1}{z^q} \Rightarrow \text{přenos má všech } q \text{ pólů v nule!} \quad (9.61)$$

Hledaný regulátor určíme podle vztahu (9.59)

$$F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{F_S(z)} \frac{z^{-q}}{1-z^{-q}} \quad (9.62)$$

Přenos otevřené regulační smyčky je

$$F_o(z) = F_S(z) F_R(z) = \frac{z^{-q}}{1-z^{-q}}$$

a pro obraz regulační odchylky dostaneme

$$E(z) = \frac{1}{1+F_o(z)} W(z) = \frac{1}{1+\frac{z^{-q}}{1-z^{-q}}} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-q}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1z^{-q}}{1-z^{-1}} \quad (9.63)$$

Z $E(z)$ vyplývá, že regulační odchylka $e(k) = w(k) - y(k)$ přejde po q krocích z hodnoty 1 do nuly a regulovaný výstup $y(t)$ nabude požadované hodnoty $w(t) = 1[t]$ za q kroků regulace.

Pro obraz řízení dostaneme vztah

$$U(z) = \frac{F_R(z)}{1+F_o(z)} W(z) = \frac{1}{F_S(z)} \frac{z^{-q}}{1-z^{-1}}, \quad (9.64)$$

ze kterého vyplývá, že řízení $u(k)$ není po q krocích nulové a je nekonečnou sekvencí, trvale působící na řízený systém. Tato „slabá verze konečného počtu kroků regulace“ zaručuje, že regulovaná veličina $y(t)$ má požadovanou hodnotu $w(t) = 1[t]$ jen v diskrétních okamžicích vzorkování, $y(k) = 1$ pro $k \geq q$, ale na spojitém časovém intervalu mezi okamžiky vzorkování, $t \in (kT, (k+1)T)$, může $y(t)$ nabývat jiných hodnot v důsledku nenulového řízení.

Příklad 9.6:

Navrhněte diskrétní regulátor dle zadaného přenosu s minimálním počtem kroků regulace při řízení skokové odezvy spojitého systému popsaného přenosem $F_S(p) = \frac{2e^{-pt_d}}{20p+1}$.

Referenčním signálem je $w(t) = 1[t]$, dopravní zpoždění $t_d = 4 \text{ sec}$. Periodu vzorkování volte $T = 2 \text{ sec}$.

Řešení:

Určíme diskretizovaný model spojitého systému s tvarovačem 0. řádu:

$$F_S(z) = (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{2e^{-2pT}}{p(20p+1)} \right\} = 2z^{-2}(1-z^{-1}) \frac{z(1-e^{-0.1})}{(z-1)(z-e^{-0.1})} = 2z^{-2} \frac{(1-e^{-0.1})z^{-1}}{(1-e^{-0.1}z^{-1})} = \frac{0.1903z^{-3}}{1-0.9048z^{-1}}$$

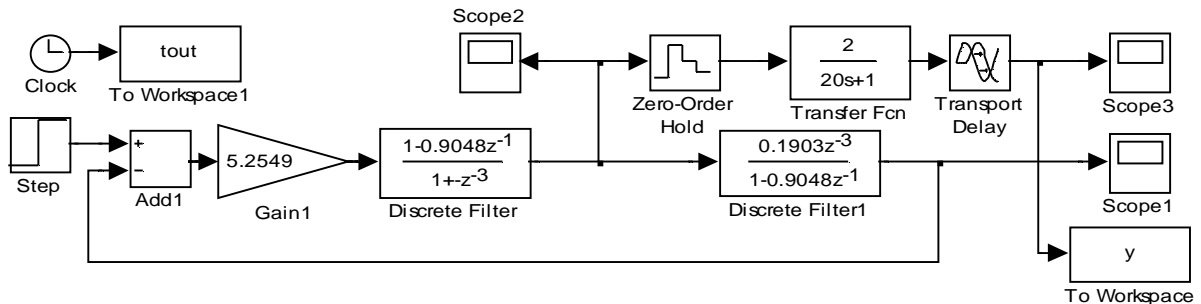
Z přenosu vidíme, že mezi vstupem a výstupem řízeného systému je zpoždění tři periody vzorkování, tj. 6 sec., tudíž požadovaný tvar přenosu uzavřené regulační smyčky je $F_M(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = z^{-q} = z^{-3}$ (rovnost relativních řádů).

Regulovaný výstup $y(t)$ nabude požadované hodnoty $w(t) = 1[t]$ za 3 kroky regulace.

Regulátor určíme podle (9.59):

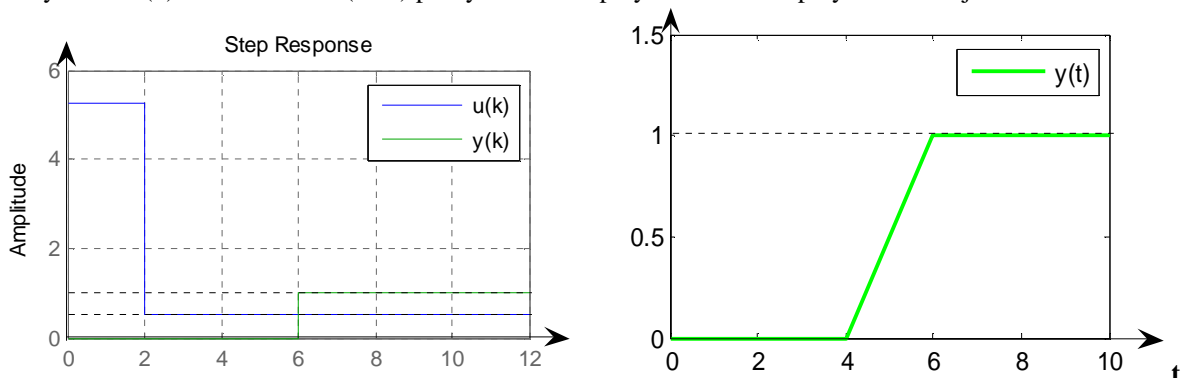
$$F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{F_S(z)} \frac{z^{-3}}{1-z^{-3}} = \frac{1-0.9048z^{-1}}{0.1903z^{-3}} \frac{z^{-3}}{1-z^{-3}} = 5.2549 \frac{1-0.9048z^{-1}}{1-z^{-3}}$$

Simulační schéma diskrétního regulačního obvodu je na obrázku. Diskrétní řízení je také použito pro simulaci skokové odezvy spojitého systému.



Graf na levé straně znázorňuje diskrétní simulaci řízení $u(k)$ a skokové odezvy $y(k)$, graf na pravé straně zobrazuje skokovou odezvu spojitého systému $y(t)$. Průběh regulační odchylky $e(k)$ není znázorněn, je zřejmý ze vztahu (9.63). Hodnotu řízení $u(0)=5.263$ lze určit z věty o počáteční hodnotě.

Hodnoty řízení $u(k)$ lze také určit z (9.64) přímým dělením polynomu čitatele polynomem ve jmenovateli.



Návrh regulátoru se zdá být jednoduchý, z praktického hlediska je však většinou nepoužitelný. Simulací si snadno ověříme, že navržený regulátor není robustní vzhledem ke změnám parametrů systému. Navíc, zkracováním periody vzorkování T se zvyšuje hodnota řízení a obvykle se dostaneme mimo realizovatelné akční zásahy.

Dahlinův regulátor

Je modifikací předchozího návrhu diskrétního regulátoru dle zadaného přenosu s minimálním počtem kroků regulace.

Modifikace spočívá v tom, že od pevně zadaného modelu požadovaného přenosu uzavřené smyčky $F_M(z)$ přecházíme na parametrizovaný model v podobě aperiodického členu 1. řádu s jednotkovým zesílením a nastavitelnou časovou konstantou t .

Upouští se tak od co nejrychlejšího sledování skokových změn referenčního signálu $w(t)$.

Modifikovaný tvar požadovaného přenosu uzavřené regulační smyčky získáme diskretizací aperiodického členu 1. řádu s tvarovačem 0. řádu a respektováním případného zpoždění o d kroků:

$$F_M(z) = Z \left\{ \frac{1-e^{-pT}}{p} \frac{1/t}{p+1/t} \right\} z^{-d} = (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/t} \right\} z^{-d} = (1-z^{-1}) \frac{(1-e^{-T/t})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T/t}z^{-1})} z^{-d}$$

$$F_M(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{1-e^{-T/t}}{1-e^{-T/t}z^{-1}} z^{-q}, \quad q = d+1 \quad (9.65)$$

Dahlinův regulátor obdržíme po dosazení za $F_M(z)$ do (9.59):

$$F_R(z) = \frac{1}{F_S(z)} \frac{F_M(z)}{1-F_M(z)} = \frac{1}{F_S(z)} \frac{(1-k)z^{-q}}{1-kz^{-1}} = \frac{1}{F_S(z)} \frac{(1-k)z^{-q}}{1-kz^{-1} - (1-k)z^{-q}}, \quad k = e^{-T/t} \quad (9.66)$$

Rychlost odezvy, a tedy i velikost akčních zásahů, lze ovlivnit volbou časové konstanty t a regulátor je robustnější vzhledem ke změnám parametrů.

Příklad 9.7:

Navrhne pro systém z předchozího příkladu Dahlinův regulátor při modifikaci požadovaného přenosu uzavřené regulační smyčky aperiodickým členem 1. řádu s časovou konstantou $t = 2$ sec.

V daném případě je $k = e^{-T/t} = e^{-1} = 0.3679$ a přenos Dahlinova regulátoru bude

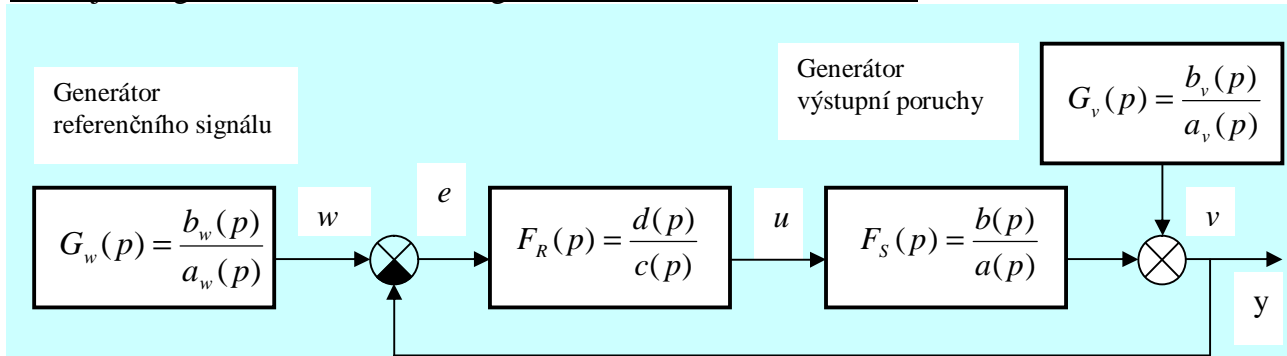
$$F_R(z) = \frac{1}{F_S(z)} \frac{(1-k)z^{-q}}{1-kz^{-1} - (1-k)z^{-q}} = \dots = 3.3268 \frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.3679z^{-1} - 0.6321z^{-3}}$$

Náhradou původního regulátoru v simulačním schéma Dahlinovým regulátorem zjistíme, že řízení skokové odezvy odpovídá požadovanému průběhu odezvy aperiodického členu a že počáteční hodnota řízení $u(0) = 5.2549$ se snížila na $u(0) = 3.3$.

9.7. Sledování obecného referenčního signálu a kompenzace poruch v ustáleném stavu („princip vnitřního modelu“)

Při návrhu regulátorů bývá často požadováno, aby regulovaná veličina $y(t)$ sledovala v ustáleném stavu obecný průběh referenčního signálu $w(t)$ a aby byl vykompenzován účinek výstupní poruchy $v(t)$ na regulovanou veličinu.

Uvažujme regulační obvod s 1DoF regulátorem dle uvedeného schéma:



Generátory „vnějších signálů“ $w(t)$ a $v(t)$ jsou popsány polynomiálními zlomky $G_w(p), G_v(p)$; předpokládáme nesoudělnost jejich polynomů: n.s.d. $(a_w(p), b_w(p)) = 1$, n.s.d. $(a_v(p), b_v(p)) = 1$.

Požadavek na sledování obecného referenčního signálu $w(t)$ regulovanou veličinou $y(t)$ v ustáleném stavu vyjádříme podmínkou : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ při $v(t) = 0$.

Pro L-obraz regulační odchylky $E(p)$ platí

$$E(p) = \frac{1}{1 + F_o(p)} W(p) = \frac{a(p)c(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} \frac{b_w(p)}{a_w(p)} = \frac{a(p)c(p)}{a_z(p)} \frac{b_w(p)}{a_w(p)} = \frac{\beta_z^o(p)}{a_z(p)} + \frac{\beta_w^o(p)}{a_w(p)} \quad (9.67)$$

tz., že jej lze zapsat jako součet obrazů přirozené a vynucené složky $E(p) = E_n(p) + E_f(p)$.

Polynomy $\tilde{b}_z(p), \tilde{b}_w(p)$ určíme porovnáním čitateľů v (9.67)

$$a(p)c(p)b_w(p) = \tilde{b}_z(p)a_w(p) + \tilde{b}_w(p)a_z(p) \quad (9.68)$$

Po zpětné transformaci (9.67) dostaneme $e(t) = e_n(t) + e_f(t)$ a podmínku pro sledování $w(t)$

v ustáleném stavu rozepíšeme do tvaru $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_n(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} e_f(t) = 0$. Protože ve stabilní uzavřené regulační smyčce platí $\lim_{t \rightarrow \infty} e_n(t) = 0$, stačí položit $\tilde{b}_w(p) = 0$, což zaručí $\lim_{t \rightarrow \infty} e_f(t) = 0$.

Dostáváme tak podmínku pro sledování referenčního signálu $w(t)$ v ustáleném stavu

$$a(p)c(p)b_w(p) = \tilde{b}_z(p)a_w(p), \quad (9.69)$$

ze které lze vyvodit, že polynom $a_w(p)$ musí dělit součin polynomů $a(p)c(p)$, protože s polynomem $b_w(p)$ je dle předpokladu nesoudělný.

Požadavek na kompenzaci výstupní poruchy $v(t)$ v ustáleném stavu vyjádříme podmínkou:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{při} \quad w(t) = 0.$$

Pro L-obraz výstupní veličiny $Y(p)$ při působení poruchy $V(p)$ platí analogické vztahy jako pro regulační odchylku:

$$Y(p) = \frac{1}{1 + F_o(p)} V(p) = \frac{a(p)c(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} \frac{b_v(p)}{a_v(p)} = \frac{b_z(p)}{a_z(p)} \frac{b_v(p)}{a_v(p)} = \frac{\tilde{b}_z(p)}{a_z(p)} + \frac{\tilde{b}_v(p)}{a_v(p)} \quad (9.70)$$

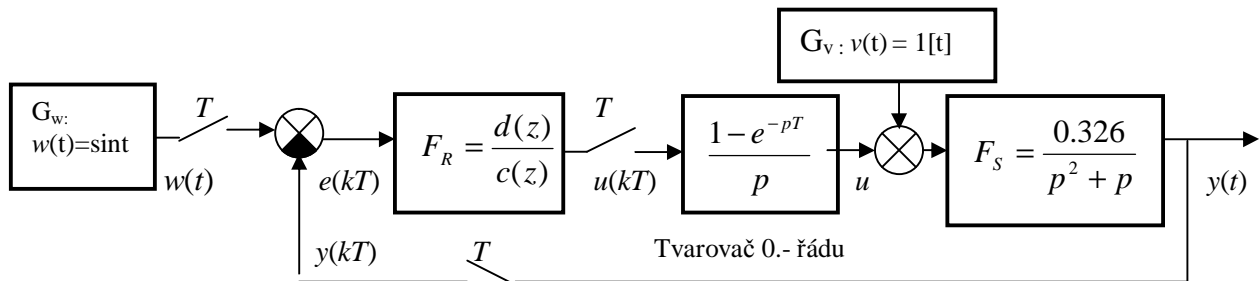
a lze tedy odvodit shodné závěry jako v předešlém případě.

Princip vnitřního modelu:

Pro sledování obecného referenčního signálu $w(t)$ v ustáleném stavu regulovanou veličinou $y(t)$ resp. pro kompenzaci výstupní poruchy $v(t)$ je postačující, aby póly systému generujícího referenční signál resp. výstupní poruchu byly obsaženy v pólech otevřené regulační smyčky (bud' jsou obsaženy v pólech systému nebo se musí stát součástí pólů regulátoru).

Příklad 9.8:

Princip vnitřního modelu budeme demonstrovat na diskretním řízení spojitého systému dle blokového schéma:



K danému spojitému systému navrhnete diskretní regulátor s konečným počtem kroků regulace ($z_i^* = 0, \forall i$) tak, aby po konečném počtu kroků regulace (v ustáleném stavu) sledovala regulovaná veličina referenční signál $w(t) = \sin t$ a byla kompenzována skoková porucha $v(t) = 1[t]$, která působí na vstupu řízeného systému.

Periodu vzorkování volte $T = 1 \text{ sec}$.

Řešení:

1/ Určíme diskretizovaný model spojitého systému s tvarovačem 0.-tého řádu

$$F_S(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{F_S(p)}{p} \right\} \right\} = \frac{0.12(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)} = \frac{b(z)}{a(z)} ; \quad \text{st } a(z) = 2$$

2/ Určíme Z-obraz poruchy přepočtené na výstup(!)

$$V(z) = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{0.326}{p^2(p+1)} \right\} \right\} = \dots = \frac{0.12z(z+0.718)}{(z-1)^2(z-0.368)} \quad (\text{bez tvarovače!})$$

3/ Určíme Z-obraz referenčního signálu

$$W(z) = Z \{ \sin t \} |_{t=kT} = \frac{0.84z}{z^2 - 1.083z + 1} \quad (\text{bez tvarovače!})$$

4/ Podle principu vnitřního modelu musí být póly systémů generující referenční signál a poruchu obsaženy v pólech otevřené regulační smyčky

$$F_o(z) = F_S(z)F_R(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \frac{d(z)}{c(z)} = \frac{0.12(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)} \frac{d(z)}{c(z)} \quad \dots \text{ v otevřené smyčce chybí polynom}$$

$(z-1)(z^2 - 1.083z + 1)$ a musí se tedy stát součástí polynomu regulátoru $c(z)$!

5/ Určíme řád obecného dynamického regulátoru.

Ponecháme-li stranou požadavek na sledování referenčního signálu a kompenzaci výstupní poruchy v ustáleném stavu, jedná se o úlohu s požadovaným umístěním pólů uzavřené regulační smyčky ($z_i^* = 0, \forall i$) pro řízený systém druhého řádu. Pro požadované umístění pólů by tedy stačil dynamický regulátor prvního řádu.

Z principu vnitřního modelu však vyplývá, že regulátor musí mít část svého polynomu $c(z)$ zafixovanu polynomem třetího stupně $(z-1)(z^2-1.083z+1)$ a bude tudíž 4. řádu s přenosem ve tvaru

$$F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{d_4 z^4 + d_3 z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0}{(z-1)(z^2-1.083z+1)(z-c_0)} = \frac{d(z)}{c(z)}$$

a s šesti neurčenými parametry.

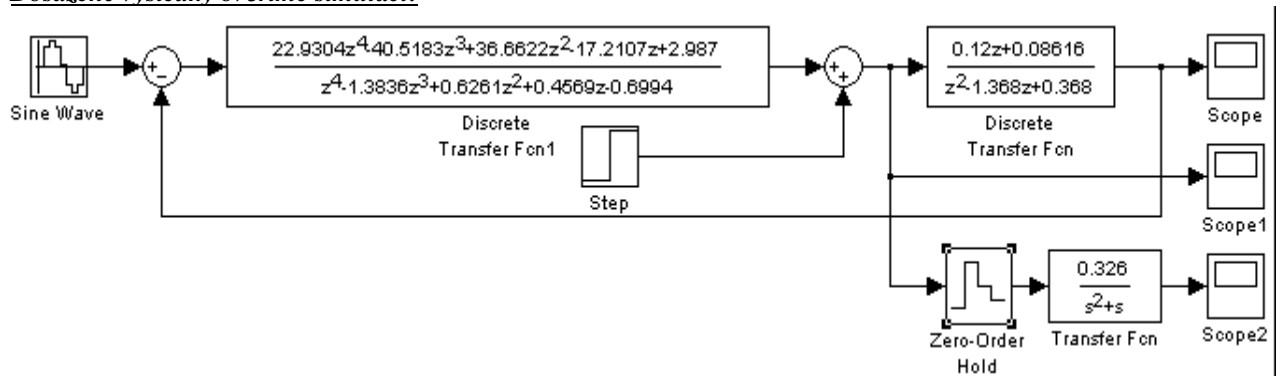
6/ Přenos uzavřené regulační smyčky je 6. řádu

$$F_{y,w}(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{F_S(z)F_R(z)}{1+F_S(z)F_R(z)} = \frac{b(z)d(z)}{a(z)c(z)+b(z)d(z)} = \frac{b_z(z)}{a_z(z)} ; \text{ st } a_z(z) = 6$$

a pro požadované umístění pólů položíme $a_z(z) = a_z^*(z) = \prod_{i=1}^6 (z-z_i^*) = z^6$.

7/ Parametry regulátoru $c_0, d_0 \dots d_4$ určíme řešením Diofantické rovnice $a(z)c(z) + b(z)d(z) = z^6$.

Dosažené výsledky ověříme simulací:



9.8. Umístitelnost pólů lineárním stavovým regulátorem

Uvažujme spojitý jednorozměrový t -invariantní LDS n -tého řádu se stavovým popisem

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); x(t_0), x(t) \in R^n - \text{měřitelný stav}, u(t), y(t) \in R^1 \quad (9.71)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

s přenosem $F_S(p) = c^T (pI - A)^{-1} b = \frac{b(p)}{a(p)}$

a lineární stavový regulátor viz (8.13), popsany rovnicí

$$\text{Reg.}: u(t) = -k^T x(t) + u_k(t), \quad (9.72)$$

kde $k^T = [k_1, \dots, k_n]$ je matice konstantních parametrů regulátoru a $u_k(t)$ je kompenzační řízení.

Po dosažení rovnice regulátoru (9.72) do (9.71) dostáváme **system se stavovou zpětnou vazbou**

$$S_z: \dot{x}(t) = (A - bk^T)x(t) + bu_k(t); x(t_0) \quad (9.73)$$

$y(t) = c^T x(t)$, který je rovněž n -tého řádu.

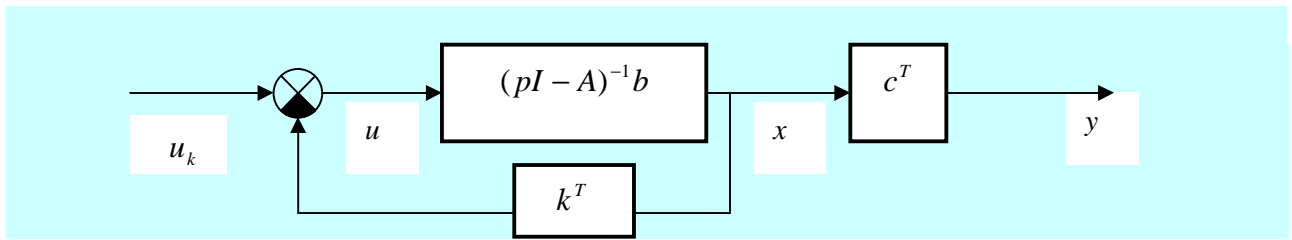
Stavový regulátor nezvyšuje řád uzavřeného systému, dochází však ke změně matice dynamiky systému $A \rightarrow A - bk^T$, mění se její vlastní čísla, a tudíž i póly odpovídajícího charakteristického polynomu uzavřeného systému $a_z(p, k^T) = \det(pI - A + bk^T)$.

Přenos systému se stavovou zpětnou vazbou

$$F_{y,u_k}(p) = \frac{Y(p)}{U_k(p)} = c^T (pI - A + bk^T)^{-1} b = \frac{c^T (pI - A + bk^T)^{Adj} b}{\det(pI - A + bk^T)} = \frac{b_z(p, k^T)}{a_z(p, k^T)} \quad (9.74)$$

navozuje představu, že lineární stavový regulátor mění i nuly systému.

Skutečnost, že **stavový regulátor může ovlivnit pouze umístění pólů** dokážeme pomocí ekvivalentního zápisu přenosu $F_{y,u_k}(p)$, který vyplývá z blokového schéma systému se stavovým regulátorem:



$$F_{y,u_k}(p) = \frac{c^T (pI - A)^{-1} b}{1 + k^T (pI - A)^{-1} b} = \frac{c^T (pI - A)^{Adj} b}{\det(pI - A) + k^T (pI - A)^{Adj} b} = \frac{b(p)}{a_z(p, k^T)} \quad (9.75)$$

Stavová zpětná vazba mění v závislosti na parametrech regulátoru $k^T = [k_1, \dots, k_n]$ pouze póly uzavřeného systému, nuly daného systému se nemění (pokud se nevykrátí s póly).

Přirozenou otázkou je, za jakých podmínek je možné docílit lineárním stavovým regulátorem libovolné umístitelnosti pólů p_i^* , $i = 1, \dots, n$, uzavřeného systému?

Jinak řečeno, kdy existuje k^T (K u vícerozměrových systémů) takové, že bude platit

$$a_z(p, k^T) = \det(pI - A + bk^T) \equiv a_z^*(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i^*) = p^n + a_{n-1}^* p^{n-1} + \dots + a_1^* p + a_0^* \quad ? \quad (9.76)$$

Věta 9-4: (Umístitelnost pólů lineárním stavovým regulátorem)

Nutnou a postačující podmínkou libovolné umístitelnosti pólů lineárním stavovým regulátorem je říditelnost LDS.

Nástin důkazu:

Předpokládejme, že daný systém $S(A, b, c^T)$ je neřiditelný.

Potom musí být ekvivalentní s neřiditelnou stavovou reprezentací systému (viz Kalmanova dekompozice)

$$\bar{S} : \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}^1(t) \\ \dot{\bar{x}}^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1(t) \\ \bar{x}^2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}^1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad \text{Uvažujme stavový regulátor } u(t) = - \begin{bmatrix} \bar{k}^1 & \bar{k}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1(t) \\ \bar{x}^2(t) \end{bmatrix}.$$

Po dosazení regulátoru do rovnice systému dostaneme uzavřený systém s maticí dynamiky $(\bar{A} - \bar{b}\bar{k}^T)$ a s charakteristickým polynomem

$a_z(p, k^T) = \det(pI - \bar{A}_{11} + \bar{b}^1 \bar{k}^1) \det(pI - \bar{A}_{22})$, ze kterého je zřejmé, že póly odpovídající vlastním číslům matice \bar{A}_{22} jsou regulátorem neovlivnitelná. Naopak, bude-li systém říditelný, lze tyto póly regulátorem ovlivnit.

Návrh stavového regulátoru při specifikaci požadovaného umístění pólů

Je-li požadované umístění pólů uzavřeného systému specifikováno polynomem $a_z^*(p)$, určíme parametry k^T stavového regulátoru položením $a_z(p, k^T) = a_z^*(p)$

$$a_z(p, k^T) = \det(pI - A + bk^T) = a_z^*(p) = p^n + a_{n-1}^* p^{n-1} + \dots + a_1^* p + a_0^* \quad (9.77)$$

a porovnáním výrazů u stejných mocnin proměnné p .

Algoritmicky nejjednodušší výpočet parametrů regulátoru je pro systém ve Frobeniově stavové reprezentaci, protože v matici dynamiky uzavřeného systému $(A_F - b_F k^T)$ se parametry regulátoru objeví pouze v poslední řádce, kde se odečítají od parametrů systému.

Ve Frobeniově stavové reprezentaci $S(A_F, b_F, c_F^T)$ jsou koeficienty v poslední řádce matice

dynamiky A_F přímo koeficienty charakteristického polynomu uzavřeného systému $a_z(p, k^T)$ a není tedy nutný jeho výpočet:

$$A_F - b_F k^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & \dots & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix}, \quad b_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k^T = [k_1 \quad \mathbf{L} \quad k_n]$$

$$\Rightarrow \det(pI - A_F + b_F k^T) = a_z(p, k^T) = p^n + (a_{n-1} + k_n)p^{n-1} + \dots + (a_1 + k_2)p + (a_0 + k_1) \quad (9.78)$$

Porovnáním $a_z(p, k^T) = a_z^*(p)$ dostáváme pro výpočet parametrů regulátoru jednoduchý vztah

$$u(t) = -k^T x(t), \quad k^T = [k_1 \quad \mathbf{L} \quad k_n], \quad k_{i+1} = a_i^* - a_i; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (9.79)$$

Je-li systém v obecné stavové reprezentaci (A, b, c^T) , lze pro návrh stavového regulátoru také použít **Ackermannovu formuli** pro libovolné umístění pólů

$$u(t) = -[0, \dots, 0, 1] Q_D^{-1} a_z^*(A) x(t) = -k^T x(t), \quad (9.80)$$

kde Q_D je matice dosažitelnosti daného systému $Q_D = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ a $a_z^*(A)$ je maticový polynom pro požadované umístění pólů, získaný aplikací Cayley-Hamiltonovy věty na $a_z^*(p)$:

$$a_z^*(p) = p^n + a_{n-1}^* p^{n-1} + \dots + a_1^* p + a_0^* \rightarrow a_z^*(A) = A^n + a_{n-1}^* A^{n-1} + \dots + a_1^* A + a_0^* I \quad (9.81)$$

Kompensace statického zesílení při návrhu stavového regulátoru

Stavovou zpětnou vazbou ovlivníme pouze rozložení pólů uzavřeného systému, nuly zůstávají nezměněny. Změní se tudíž statické zesílení uzavřeného systému a při regulaci na konstantní hodnotu je nutná jeho kompenzace kompenzačním řízením $u_k(t) = k_{komp} w(t)$ tak, aby přenos uzavřeného systému měl v ustáleném stavu jednotkové zesílení.

Uvažujme řízení skokové odezvy LDS stavovým regulátorem při $w(t) = 1[t]$.

L-obraz výstupu uzavřeného systému je podle (9.74)

$$Y(p) = c^T (pI - A + bk^T)^{-1} bk_{komp} W(p)$$

Protože v ustáleném stavu požadujeme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pc^T (pI - A + bk^T)^{-1} bk_{komp} \frac{1}{p} = 1 \quad (9.82)$$

je kompenzační koeficient k_{komp} dán vztahem

$$k_{komp} = \frac{1}{c^T (-A + bk^T)^{-1} b} = \frac{1}{F_z(0)} \quad (9.83)$$

Nevýhodou této kompenzace je její nerobustnost, protože při změně parametrů systému je nutno kompenzační koeficient vždy přepočítat.

V dalším odstavci ukážeme, že tuto nevýhodu odstraní použití stavového regulátoru s integrací.

Příklad 9.9: Návrh stavového regulátoru s požadovanou změnou umístění pólů

K nestabilnímu systému s přenosem $F_S(p) = \frac{1}{p^2 - 5p + 1}$, ($p_1 = 4.7913$, $p_2 = 0.2087$), navrhnete stavový

regulátor s požadovaným umístěním pólů uzavřeného systému $p_1^* = p_2^* = -2$.

V ustáleném stavu požadujeme, aby výstup sledoval referenční signál $w(t) = 1[t]$.

Řešení:

Určíme Frobeniovu stavovou reprezentaci daného přenosu a matici dynamiky uzavřeného systému

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}; \quad b_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c_F^T = [1 \quad 0]; \quad k^T = [k_1 \quad k_2]; \quad A_F - b_F k^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - k_1 & 5 - k_2 \end{bmatrix}$$

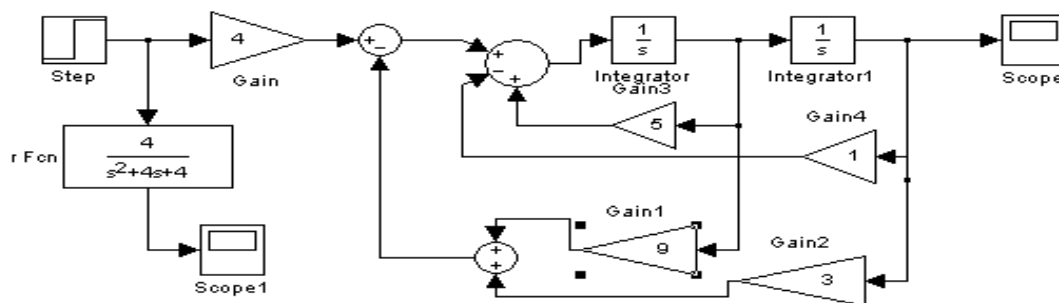
Charakteristický polynom uzavřeného systému: $\det(pI - A_F + b_F k^T) = a_z(p, k^T) = p^2 + (-5 + k_2)p + 1 + k_1$

Jeho porovnáním s požadovaným $a_z^*(p) = \prod_{i=1}^2 (p - p_i^*) = p^2 + 4p + 4$ dostáváme $k_1 = 3$, $k_2 = 9$.

Kompenzační koeficient $k_{komp} = 4$ je v daném případě zřejmý z tvaru přenosů, lze jej spočítat dle (9.83).

Navržený regulátor je popsán rovnicí $u(t) = -3x_1(t) - 9x_2(t) + 4w(t)$.

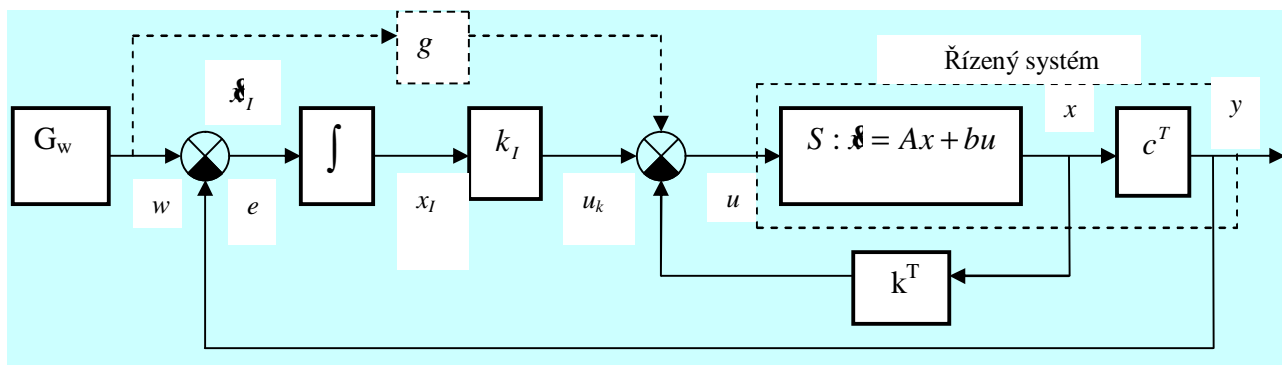
Simulační schéma je na obrázku spolu s požadovaným přenosem uzavřeného systému:



9.9. Lineární stavový regulátor s integrací

Regulátor je v podstatě lineární stavový regulátor, který je doplněn o integraci regulační odchylky, zavedené vnější zpětnou vazbou od regulovaného výstupu. Do otevřené regulační smyčky je tak zaveden astatismus, zaručující přesnost regulace při regulaci na konstantní hodnotu. V tomto smyslu lze integrační složku regulátoru považovat za vnitřní model generátoru referenčního signálu (viz princip vnitřního modelu).

Blokové schéma regulačního obvodu a jeho popis:



Řízený systém:

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); x(t_0), x(t) \in R^n - \text{měřitelný stav}, u(t), y(t) \in R^1 \quad (9.84)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

Regulátor:

$$\text{Reg: } \dot{x}_I(t) = w(t) - c^T x(t); x_I(t) \in R^1$$

$$u(t) = -k^T x(t) + k_I x_I(t) + (gw(t)) \quad (9.85)$$

k_I je integrační konstanta, $k^T = [k_1, \dots, k_n]$ je řádková matice parametrů stavového regulátoru.

Uzavřený systém s rozšířeným vektorem stavu dostaneme po dosazení za řízení $u(t)$ do (9.84):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk^T & bk_I \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg \\ 1 \end{bmatrix} w(t); \quad A_z = \begin{bmatrix} A - bk^T & bk_I \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} \quad (9.86)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix}$$

Lze odvodit, že přímovazební složka řízení $gw(t)$ zavádí do čitatele přenosu uzavřeného systému polynom $(gp + k_I)$, tedy nulu s hodnotou k_I / g . Pokud zavedení nuly nevyžadujeme, je $g = 0$.

Návrh stavového regulátoru s integrací a určení jeho $n+1$ parametrů k_1, \dots, k_n, k_I lze provést z požadavku na umístění pólů, specifikované příslušným polynomem $a_z^*(p)$, $st a_z^*(p) = n+1$. Hledané parametry regulátoru určíme porovnáním charakteristického polynomu uzavřeného systému s polynomem, určeným z požadovaného umístění pólů:

$$\det(pI - A_z) = a_z(p, k^T, k_I) = a_z^*(p) \quad (9.87)$$

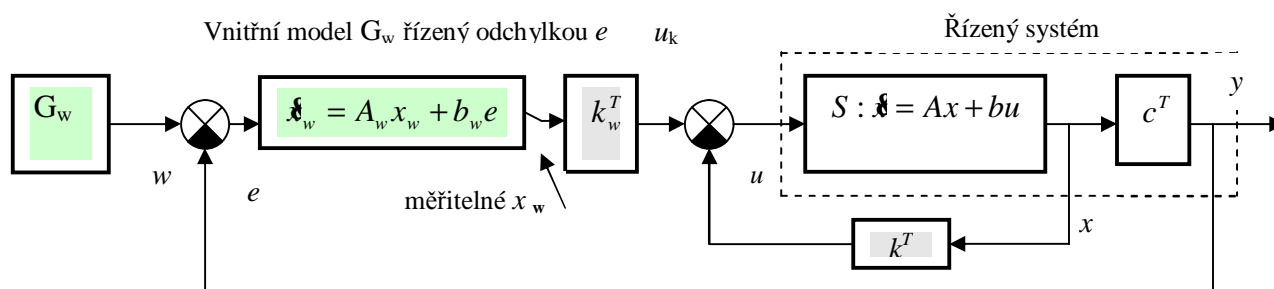
9.10. Lineární stavový regulátor pro sledování obecného referenčního signálu a kompenzaci poruch v ustáleném stavu.

V předchozím odstavci jsme zavedení integrační složky do otevřené regulační smyčky interpretovali jako použití *principu vnitřního modelu* při regulaci na konstantní hodnotu.

Nabízí se zobecnění:

Nahradit integrační složku stavovým modelem generátorů externích signálů (referenční signál $w(t)$, výstupní poruchu $v(t)$) a docílit v ustáleném stavu sledování obecného referenčního signálu a/nebo kompenzaci výstupní poruchy.

Zjednodušené blokové schéma pro sledování obecného referenčního signálu $w(t)$:



Řízený systém:

$$S : \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); x(t_0), x(t) \in R^n - \text{měřitelný stav}, u(t), y(t) \in R^1 \quad (9.88)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

Generátor referenčního signálu $w(t)$:

$$G_w : \dot{x}_w(t) = A_w x_w(t); x_w(t_0) \dots \text{daná počáteční podmínka}, \quad (9.89)$$

$$w(t) = c_w^T x_w(t) \quad x_w(t) \in R^l \dots \text{stav vnitřního modelu (měřitelný)}$$

Vnitřní model generátoru referenčního signálu $w(t)$ musí být říditelný odchylkou $e(t)$:

$$G_w : \dot{x}_w(t) = A_w x_w(t) + b_w e(t) = A_w x_w(t) + b_w [w(t) - c^T x(t)], \quad (9.90)$$

b_w je libovolná matice ($l \times 1$) zaručující říditelnost vnitřního modelu G_w !

Stavová reprezentace systému S s vnitřním modelem G_w :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -b_w c^T & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_w \end{bmatrix} w(t); \quad \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & 0 \\ 0 & c_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix} \quad (9.91)$$

Protože požadujeme, aby v ustáleném stavu sledoval regulovaný výstup referenční signál, musí být uzavřený systém stabilní.

(Připomeňme si odst. 3.1 v LS1: ... u stabilních systémů přirozená složka odezvy konverguje k nule a celková odezva je dána vynucenou složkou odezvy...)

Pro zajištění stability uzavřeného systému použijeme stavový regulátor od měřitelných $x(t), x_w(t)$:

$$\text{Reg: } u(t) = -k^T x(t) + k_w^T x_w(t), \quad (9.92)$$

kde řádkové matice $k^T \dots (1 \times n)$ a $k_w^T \dots (1 \times l)$ obsahují $(n+l)$ neznámých parametrů regulátoru.

Uzavřený systém s vnitřním modelem dostaneme po dosazení za řízení $u(t)$ do (9.91):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk^T & bk_w^T \\ -b_w c^T & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_w \end{bmatrix} w(t), \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ x_w(t_0) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & 0 \\ 0 & c_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix} \quad (9.93)$$

Označíme matici dynamiky uzavřeného systému A_z , $A_z = \begin{bmatrix} A - bk^T & bk_w^T \\ -b_w c^T & A_w \end{bmatrix}$.

Uurčíme její charakteristický polynom $\det(pI - A_z) = a_z(p, k^T, k_w^T)$ a specifikujeme požadované umístění pólů polynomem $a_z^*(p)$, st $a_z^*(p) = n + l$.

Hledané parametry regulátoru určíme porovnáním

$$a_z(p, k^T, k_w^T) = a_z^*(p) \quad (9.94)$$

Příklad 9.10:

Použijte princip vnitřního modelu a navrhnete stavový regulátor k řízenému systému s přenosem

$$F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p+2} \text{ tak, aby výstup sledoval v ustáleném stavu "rampovou" funkci } w(t) = t.$$

Všechny póly p_i^* uzavřeného systému zvolte s hodnotou -1.

Řešení:

Uurčíme stavový model řízeného systému:

$$S: \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = -2x(t) + u(t); \quad y(t) = x(t) \quad \rightarrow \quad A = -2, \quad b = 1, \quad c^T = 1$$

Uurčíme stavový model G_w , řízený regulační odchylkou $e(t)$:

Pro zadané $w(t) = t$ resp. $W(p) = 1/p^2$ dostáváme Frobeniovu stavovou reprezentaci

$$G_w: \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{1w}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{2w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1w}(t) \\ x_{2w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t); \quad w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1w}(t) \\ x_{2w}(t) \end{bmatrix}$$

$A_w \qquad b_w \qquad c_w^T$

Řízený systém s vnitřním modelem G_w je popsán stavovým modelem třetího řádu (9.91)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -b_w c^T & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_w \end{bmatrix} w(t); \quad \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & 0 \\ 0 & c_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix}$$

a po dosazení

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{1w}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{2w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{1w}(t) \\ x_{2w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t); \quad \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{1w}(t) \\ x_{2w}(t) \end{bmatrix}$$

Rovnici stavového regulátoru pro řízený systém S a s vnitřním modelem G_w

$$u(t) = \begin{bmatrix} -k & k_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix} = -kx(t) + k_{1w}x_{1w}(t) + k_{2w}x_{2w}(t), \quad (k \equiv k^T \text{ je v tomto případě skalární veličina}),$$

dosadíme do (9.93).

Určíme matici dynamiky uzavřeného systému $A_z = \begin{bmatrix} A - bk & bk_w^T \\ -b_w c^T & A_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - k & k_{1w} & k_{2w} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

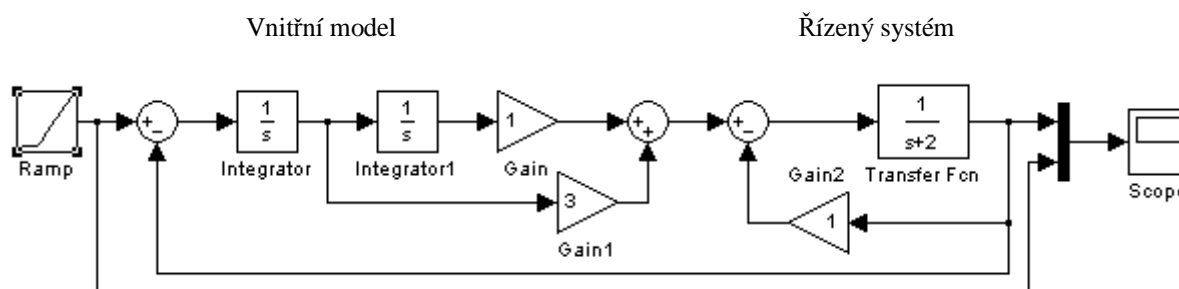
a charakteristický polynom uzavřeného systému

$$a_z(p, k, k_w^T) = \det(pI - A_z) = \det \begin{bmatrix} p + 2 + k & -k_{1w} & -k_{2w} \\ 0 & p & -1 \\ 1 & 0 & p \end{bmatrix} = p^3 + (2 + k)p^2 + k_{2w}p + k_{1w}$$

Parametry regulátoru určíme porovnáním $a_z(p, k, k_w^T)$ s $a_z^*(p) = (p + 1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$

Vypočtené hodnoty parametrů: $k = 1, k_{1w} = 1, k_{2w} = 3.$

Funkci regulátoru lze ověřit simulací:



9.11. Lineární stavový regulátor pro konečný počet kroků regulace

Při přímém návrhu diskretních regulátorů lze požadovat, aby regulovaný výstup či stav spojitého řízeného systému dosáhl požadovaných hodnot v *konečném čase*, daném konečným počtem kroků regulace N násobených periodou vzorkování T .

V odstavci 9.6. jsme se zabývali návrhem *diskretního dynamického regulátoru* pro řízení skokové odezvy s *minimálním počtem kroků*, daným celkovým zpožděním výstupu diskretního modelu řízeného systému oproti vstupu ($q = N_{\min} + d$). V interpretaci požadovaného tvaru přenosové funkce uzavřené smyčky jsme zjistili, že q pólů uzavřeného systému musí být umístěno v nule. Dynamický regulátor s inverzním modelem systému byl však nerobustní a z praktického hlediska nepoužitelný.

Zabývejme se nyní návrhem *diskretního lineárního stavového regulátoru* pro řízení skokové odezvy s *konečným počtem kroků regulace*.

Uvažujme diskretní stavový model spojitého jednorozměrového (SISO) systému s tvarovačem 0. řádu s měřitelným stavem

$$S: \quad x(k+1) = Ax(k) + bu(k); \quad x(0), \quad x(k) \in R^n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.95)$$

$$y(k) = c^T x(k)$$

Z věty o říditelnosti SISO systému vyplývá, že minimální počet kroků N pro převedení libovolné nenulové počáteční podmínky $x(0) \neq 0$ do počátku stavového prostoru, $x(N) = 0$, je roven dimenzi vektoru stavu: $\dim x = n \equiv N$.

Důkaz tohoto tvrzení bezprostředně vyplývá z explicitního řešení stavové rovnice

$$x(N) = A^N x(0) + \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-j-1} b u(j) = A^N x(0) + [b, Ab, \dots, A^{N-1}b] \begin{bmatrix} u(N-1) \\ \mathbf{M} \\ u(0) \end{bmatrix}. \quad (9.96)$$

Libovolný nenulový n -dimenzionální vektor $x(0) \neq 0$ může být převeden do $x(N) = 0$ sekvencí N kroků řízení $u(0), \dots, u(N-1)$ tehdy a jen tehdy, jestliže matice říditelnosti (dosažitelnosti)

$Q_D = [b, Ab, \dots, A^{N-1}b]$ bude invertovatelná.

To znamená, že hodnost matice říditelnosti (dosažitelnosti) musí být rovna dimenzi vektoru stavu $h[b, Ab, \dots, A^{N-1}b] = n$, a tedy počet kroků řízení N je dán dimenzí vektoru stavu $N = n$.

Předpokládejme, že sekvence řízení bude generována lineárním stavovým regulátorem:

$$\text{Reg.: } u(k) = -k^T x(k) + u_k(k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (9.97)$$

Po dosazení rovnice regulátoru při $u_k(k) \equiv 0$ do (9.95) dostáváme rovnice uzavřeného systému

$$S_z: \quad x(k+1) = (A - bk^T)x(k) = A_z x(k); \quad x(0) \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.98)$$

$$y(k) = c^T x(k)$$

Vyjděme z explicitního řešení stavové a výstupní rovnice uzavřeného systému pro $N = n$:

$$x(n) = A_z^n x(0) \quad \text{a} \quad y(n) = c^T A_z^n x(0); \quad x(0) \neq 0 \quad (9.99)$$

Protože požadujeme $x(n) = 0$, $y(n) = 0$, musí být stavový regulátor navržen tak, aby $A_z^n = 0$ (A_z musí být nilpotentní maticí se stupněm n).

Použitím **Cayley-Hamiltonovy věty** („Každá čtvercová matice vyhovuje své charakteristické rovnici“) a podmínky $A_z^n = 0$, určíme požadovaný tvar charakteristického polynomu uzavřeného systému $a_z^*(z)$ pro minimální počet kroků regulace n :

$$a_z^*(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i^*) = z^n + a_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + a_1^* z + a_0^* = z^n \quad (9.100)$$

Jinak řečeno, **všechny póly uzavřeného systému musí být nulové**: $z_i^* = 0$, $\forall i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Důkaz:

Aplikací C.-H. věty dostaneme $a_z^*(A_z) = A_z^n + a_{n-1}^* A_z^{n-1} + \dots + a_1^* A_z + a_0^* I = 0$.

Dosazením podmínky $A_z^n = 0$ vidíme, že rovnice je splněna, jestliže $a_{n-1}^* = a_{n-2}^* = \dots = a_0^* = 0$. Odtud plyne (9.100).

Parametry stavového regulátoru pro minimální počet kroků regulace opět určíme porovnáním charakteristického polynomu uzavřeného systému $a_z(z, k^T) = \det(zI - A + bk^T)$ s požadovaným tvarem polynomu $a_z^*(z)$:

$$a_z(z, k^T) = \det(zI - A + bk^T) = a_z^*(z) = z^n \quad (9.101)$$

Pokud bude diskretní systém ve Frobeniově stavové reprezentaci, potom podle (9.79)

$$u(k) = -[k_1, \dots, k_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \mathbf{M} \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \quad \text{kde } k_{i+1} = -a_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (9.102)$$

Je-li systém v obecné stavové reprezentaci, lze použít Ackermanovu formuli

$$u(k) = -[0, \dots, 0, 1] Q_D^{-1} A^n x(k) = -k^T x(k) \quad (9.103)$$

Takto navržený stavový regulátor lze použít i pro minimálně-krokové řízení skokové odezvy systému (v nulových počátečních podmínkách), je však nutné použít kompenzační řízení $u_k(k) = k_{komp} w(k)$ pro kompenzaci statického zesílení uzavřeného systému.

Příklad 9.11:

Pro řízení skokové odezvy spojitého systému s přenosem $F_S(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$ navrhnete minimálně krokový stavový regulátor. Periodu vzorkování zvolte $T = 0.1$ sec., $w(t) = 1[t]$.

Řešení:

Určíme diskrétní přenos systému s tvarovačem 0. řádu

$$F_S(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.004833z + 0.004675}{z^2 - 1.895z + 0.9048} = \frac{0.004833z^{-1} + 0.004675z^{-2}}{1 - 1.895z^{-1} + 0.9048z^{-2}},$$

kterému odpovídá stavová reprezentace ve Frobeniově tvaru

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9048 & 1.895 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k); \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(k) = [0.004675 \quad 0.004833] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Řízený systém je druhého řádu ($n = 2$), a tudíž požadované hodnoty $w(k) = 1$ musí regulovaný výstup nabýt po dvou krocích regulace.

Rovnice stavového regulátoru s kompenzačním řízením pro korekci statického zesílení

$$u(k) = 0.9048x_1(k) - 1.895x_2(k) + u_k(k), \quad u_k(k) = k_{komp} w(k)$$

Po dosažení za řízení dostáváme stavový popis uzavřeného systému

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k(k); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(k) = [0.004675 \quad 0.004833] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix},$$

Odpovídající diskrétní přenos uzavřeného systému má tvar

$$F_z(z) = \frac{Y(z)}{U_k(z)} = c^T (zI - A + bk^T)^{-1} b = \frac{0.004833z + 0.004675}{z^2},$$

nemá však jednotkové statické zesílení.

Pro určení k_{komp} využijeme větu o konečné hodnotě

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F_z(z)U_k(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F_z(z) k_{komp} \frac{z}{z-1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.004833z + 0.004675}{z^2} k_{komp} \frac{z}{z-1} = 1 \rightarrow \underline{k_{komp} = 105.1746} \end{aligned}$$

Simulaci diskrétního řízení a diskrétní odezvy spolu s průběhem odezvy spojitého systému znázorňuje následující blokové schéma.

Simulací lze ověřit, že regulovaný výstup nabývá požadované hodnoty ve dvou krocích, tedy za 0.2 sec., spojitý regulovaný výstup $y(t)$ zůstává na požadované hodnotě $\forall t, t \geq 2T$.

Sekvence zpětnovazebního řízení je po dvou krocích nulová a systém již není řízením ovlivňován. Jedná se o tzv. silnou verzi konečného počtu kroků regulace.

Požadujeme, aby při regulaci skokové odezvy i diskrétní dynamický regulátor, podobně jako diskrétní stavový regulátor, zajistil požadovanou hodnotu regulovaného výstupu za minimální počet kroků regulace $k = n$ a setrval na této hodnotě i ve všech časových okamžicích $t \in [kT, (k+1)T], \forall k$. Jinak řečeno, požadujeme nulovou regulační odchylku po n krocích regulace nejen v diskrétních časových okamžicích, ale i ve spojitém čase.
To lze zajistit požadavkem, aby také řízení bylo po n krocích nulové a nebyl tak ovlivňován řízený systém – jedná se o již zmíněnou **silnou verzi konečného počtu kroků regulace**.

Požadujeme tedy, aby regulační odchylka $e(k)$ a řízení $u(k)$ byly konečné sekvence a aby platilo

$$e(t) = 0 \wedge u(t) = 0 \text{ pro } t \geq nT \quad (9.107)$$

Vyděme z přenosů referenčního signálu na řízení a na regulační odchylku v uzavřené regulační smyčce:

$$F_{u,w}(z) = \frac{U(z)}{W(z)} = \frac{F_R(z)}{1 + F_S(z)F_R(z)} = \frac{K_R \frac{d(z)}{c(z)}}{1 + K_S K_R \frac{b(z)d(z)}{(z-1)a(z)c(z)}} = \frac{K_R (z-1)a(z)d(z)}{(z-1)a(z)c(z) + K_S K_R b(z)d(z)} \quad (9.108a)$$

$$F_{e,w}(z) = \frac{E(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + F_S(z)F_R(z)} = \frac{1}{1 + K_S K_R \frac{b(z)d(z)}{(z-1)a(z)c(z)}} = \frac{(z-1)a(z)c(z)}{(z-1)a(z)c(z) + K_S K_R b(z)d(z)} \quad (9.108b)$$

Charakteristický polynom uzavřené smyčky $a_z(z)$ je pro oba přenosy stejný:

$$a_z(z) = (z-1)a(z)c(z) + K_S K_R b(z)d(z), \text{ přičemž st } a_z(z) = 2n-1 \quad (9.109)$$

Pro docílení n -krokové odezvy $u(k)$ a $e(k)$ na skokovou změnu $w(t)$ musí být n pólů uzavřené smyčky umístěno v nule a tomu odpovídá požadovaný tvar charakteristického polynomu uzavřené smyčky $a_z^*(z) = z^n$. Ten je ovšem nižšího stupně než charakteristický polynom uzavřené smyčky $a_z(z)$ a je zřejmé, že vzhledem k (9.107) musí dojít v obou přenosech (9.108a), (9.108b) ke společnému krácení čitatele a jmenovatele nějakým polynomem stupně $(n-1)$. Tímto polynomem je polynom $a(z)$, který se musí ve jmenovateli krátit s polynomem $d(z)$, neboť je podle předpokladu nesoudělný s $b(z)$.

Problém vede na řešení Diofantické rovnice

$$(z-1)a(z)c(z) + K_S K_R b(z)d(z) = z^n a(z), \text{ při } d(z) = a(z) \quad (9.110)$$

Návrh regulátoru pro minimální počet kroků regulace a řízení (silná verze):

1/ Položíme $d(z) = a(z)$

2/ Polynom $c(z)$ a K_R určíme řešením Diofantické rovnice (po vykrácení $d(z) = a(z)$):

$$(z-1)c(z) + K_S K_R b(z) = z^n$$

3/ Zesílení regulátoru K_R lze také určit z požadavku na jednotkové zesílení přenosu uzavřené smyčky v ustáleném stavu (a po vykrácení $a(z) = d(z)$):

$$\lim_{z \rightarrow 1} F_{y,w}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_S K_R b(z)}{z^n} = 1 \Rightarrow K_R = \frac{1}{K_S b(1)}, \text{ } b(1) \neq 0$$

4/ $F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_R \frac{d(z)}{c(z)}$

Výpočet konečných sekvencí $\{u(k)\}_{k=0}^{n-1}$ a $\{e(k)\}_{k=0}^{n-1}$ při $w(t) = 1[t]$, resp. $W(z) = \frac{z}{z-1}$:

$$U(z) = F_{u,w}(z)W(z) = \frac{K_R(z-1)d(z)}{z^n} \frac{z}{z-1} = K_R(z^{n-1} + d_{n-2}z^{n-2} + \dots + d_1z + d_0)z^{-(n-1)} =$$

$$= K_R(1 + d_{n-2}z^{-1} + \dots + d_1z^{-(n-2)} + d_0z^{-(n-1)}) \dots U(z) \text{ je polynom konečného stupně!}$$

$$E(z) = F_{e,w}(z)W(z) = \frac{(z-1)c(z)}{z^n} \frac{z}{z-1} = (z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \dots + c_1z + c_0)z^{-(n-1)} =$$

$$= (1 + c_{n-2}z^{-1} + \dots + c_1z^{-(n-2)} + c_0z^{-(n-1)}) \dots E(z) \text{ je polynom konečného stupně!} \quad (9.111)$$

Po transformaci do časové oblasti dostáváme:

$$\{u(k)\}_{k=0}^{n-1} = \{K_R, K_R d_{n-2}, \dots, K_R d_1, K_R d_0\}, \quad \{e(k)\}_{k=0}^{n-1} = \{1, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0\} \quad (9.112)$$

Při řízení skokové odezvy se polynomiální zlomky $U(z), E(z)$ mohou stát polynomem konečného stupně jen v případě, že řízeným systémem je polohový servosystém.

Jen v tomto případě dochází k nutnému krácení členu $(z-1)$ v (9.111), jinak bychom dostali polynom nekonečného stupně. Při minimálně-krokovém řízení je doba regulace $T_{reg} = nT$.

Zkrácení doby regulace zavedením kratší periody vzorkování T vede na velké či nerealizovatelné hodnoty řízení. Pro snížení hodnot řízení je nutné zvětšit periodu řízení T a/nebo navrhnout regulátor s větším počtem kroků regulace.

Návrh regulátoru pro zvýšený počet kroků regulace a řízení ($N > n$, silná verze):

Požadujeme-li počet kroků regulace a řízení $N > n$, budeme řešit Diofantickou rovnici pro regulátor řádu $N-1$ a s požadavkem na umístění N pólů do nuly. Protože v přenosech (9.108) musí být opět vykrácen polynom $a(z)$, st $a(z) = n-1$ s polynomem $d(z)$, st $d(z) = N-1$, položíme

$$d(z) = a(z)a(z), \text{ kde } a(z) \text{ je libovolný monický polynom stupně } N-n. \quad (9.113)$$

Problém vede na řešení Diofantické rovnice

$$(z-1)a(z)c(z) + K_S K_R b(z)d(z) = z^N a(z), \text{ pro } d(z) = a(z)a(z) \quad (9.114)$$

Návrh regulátoru pro zvýšený počet kroků regulace a řízení ($N > n$, silná verze):

1/ Pro specifikované $a(z)$ určíme $d(z) = a(z)a(z)$

2/ K_R a $c(z)$, st $c(z) = N-1$, určíme řešením Diofantické rovnice (po vykrácení):

$$(z-1)c(z) + K_S K_R a(z)b(z) = z^N$$

3/ Zesílení regulátoru K_R lze také určit z požadavku na jednotkové zesílení přenosu uzavřené smyčky v ustáleném stavu (a po vykrácení $a(z) = d(z)$):

$$\lim_{z \rightarrow 1} F_{y,w}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_S K_R a(z)b(z)}{z^N} = 1 \Rightarrow K_R = \frac{1}{K_S a(1)b(1)}, \quad b(1) \neq 0, \quad a(1) \neq 0$$

$$4/ F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_R \frac{d(z)}{c(z)}$$

Poznamenejme, že zavedení polynomu $a(z)$ zavádí do návrhu regulátoru $N-n$ stupňů volnosti, neboť koeficienty tohoto polynomu jsou součástí polynomu regulátoru $d(z) = a(z)a(z)$ a koeficienty polynomu $K_R d(z)$ určují přímo hodnoty řízení v sekvenci (9.111).

Koeficienty polynomu $a(z)$ lze tedy vybrat s ohledem na realizovatelnost hodnot řízení nebo určit jejich hodnoty jako výsledek parametrické optimalizace dle nějakého kriteriá optimality. Tyto úlohy však již překračují rámec zaměření přednášek LS2.

Návrh regulátoru pro minimální počet kroků regulace (slabá verze):

Pokud požadujeme, aby při regulaci skokové odezvy polohového servomechanismu regulovaný výstup $y(t)$, $t = kT$, nabyl požadované hodnoty za minimální počet kroků regulace $k = n$ a podržel tuto hodnotu pouze v diskrétních časových okamžicích $t = kT$, $k > n$ (tedy nikoliv ve spojitém čase $t \in [kT, (k+1)T], \forall k$), připouštíme tak nenulové řízení $u(k)$ i po n krocích a hovoříme o **slabé verzi konečného počtu kroků regulace**.

Pro návrh regulátoru vyjdeme z přenosu (9.108b):

$$F_{e,w}(z) = \frac{E(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + F_S(z)F_R(z)} = \frac{1}{1 + K_S K_R \frac{b(z)d(z)}{(z-1)a(z)c(z)}} = \frac{(z-1)a(z)c(z)}{(z-1)a(z)c(z) + K_S K_R b(z)d(z)}$$

Pro docílení n -krokové odezvy $e(k)$ na skokovou změnu $w(t)$ musí být n pólů uzavřené smyčky umístěno v nule a požadujeme tedy opět $a_z^*(z) = z^n$, který je nižšího stupně než charakteristický polynom (9.109) uzavřené smyčky $a_z(z)$. V přenosu (9.108b) musí opět dojít ke krácení čitatele a jmenovatele nějakým polynomem stupně $(n-1)$. Tímto polynomem bude nyní polynom $c(z)$, který se musí ve jmenovateli zkrátit s polynomem $b(z)$, neboť předpokládáme jeho nesoudělnost s $d(z)$.

Problém vede na řešení Diofantické rovnice

$$(z-1)a(z)c(z) + K_S K_R b(z)d(z) = z^n c(z), \text{ při } c(z) = b(z) \quad (9.115)$$

Návrh regulátoru pro minimální počet kroků regulace (slabá verze):

1/ Položíme $c(z) = b(z)$

2/ Polynom $d(z)$ a K_R určíme řešením Diofantické rovnice (po vykrácení $b(z) = c(z)$):

$$(z-1)a(z) + K_S K_R d(z) = z^n$$

3/ Zesílení regulátoru K_R lze také určit z požadavku na jednotkové zesílení přenosu uzavřené smyčky v ustáleném stavu (po vykrácení $b(z) = c(z)$):

$$\lim_{z \rightarrow 1} F_{y,w}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_S K_R d(z)}{z^n} = 1 \Rightarrow K_R = \frac{1}{K_S d(1)}, \quad d(1) \neq 0$$

4/ $F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_R \frac{d(z)}{c(z)}$

Slabá verze konečného počtu kroků regulace často způsobuje oscilace spojitě regulované veličiny $y(t)$ mezi okamžiky vzorkování v důsledku stabilní nuly se zápornou reálnou částí, která se objevuje v polynomu $b(z)$ diskrétního modelu systému při krátké periodě vzorkování.

Protože platí $b(z) = c(z)$, stává se „nulový“ polynom systému „pólovým“ polynomem regulátoru a pól se zápornou reálnou částí je důvodem oscilujícího řízení, a tedy i oscilující regulované veličiny.

Sekvence řízení při slabé verzi je nekonečnou (stabilní) sekvencí, neboť polynomiální zlomek

$$U(z) = F_{u,w}(z)W(z) = \frac{K_R(z-1)a(z)d(z)}{(z-1)a(z)c(z) + K_S K_R b(z)d(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{K_R a(z)d(z)z}{z^n c(z)} \quad (9.116)$$

při $c(z) \neq a(z)$ nelze dělením převést na polynom konečného stupně, a tedy na konečnou sekvenci. Pro silnou i slabou verzi uvedeme ilustrativní příklad.

Příklad 9.12:

Pro spojitý servosystém popsaný přenosem $F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{0.5}{p(p+0.05)}$

navrhnete číslicový regulátor s minimálním počtem kroků pro řízení skokové odezvy na referenční signál $w(t) = 1[t]$. Regulátor navrhnete pro silnou i slabou verzi. Periodu vzorkování volte $T = 1$ sec.

Řešení:

1/ Určíme diskrétní model spojitého systému s tvarovačem 0. řádu:

$$F_S(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{K_S b(z)}{(z-1)a(z)} = \frac{0.2459z + 0.2418}{z^2 - 1.951z + 0.9512} = \frac{0.24588(z + 0.9835)}{(z-1)(z-0.9512)} \quad (\text{nula je } -0.9835!)$$

2/ Systém je druhého řádu, minimální počet kroků $n = 2$, dynamický regulátor bude 1. řádu

$$F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_R \frac{d(z)}{c(z)} = K_R \frac{z + d_0}{z + c_0}$$

Silná verze:

$$d(z) = a(z) = z - 0.9512$$

$$\text{Diofantická rovnice: } (z-1)c(z) + K_S K_R b(z) = z^2$$

$$(z-1)(z+c_0) + 0.24588 K_R (z+0.9835) = z^2 \rightarrow c_0 = 0.4959, K_R = 2.051$$

$$F_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_R \frac{z+d_0}{z+c_0} = 2.051 \frac{z-0.9512}{z+0.4958}$$

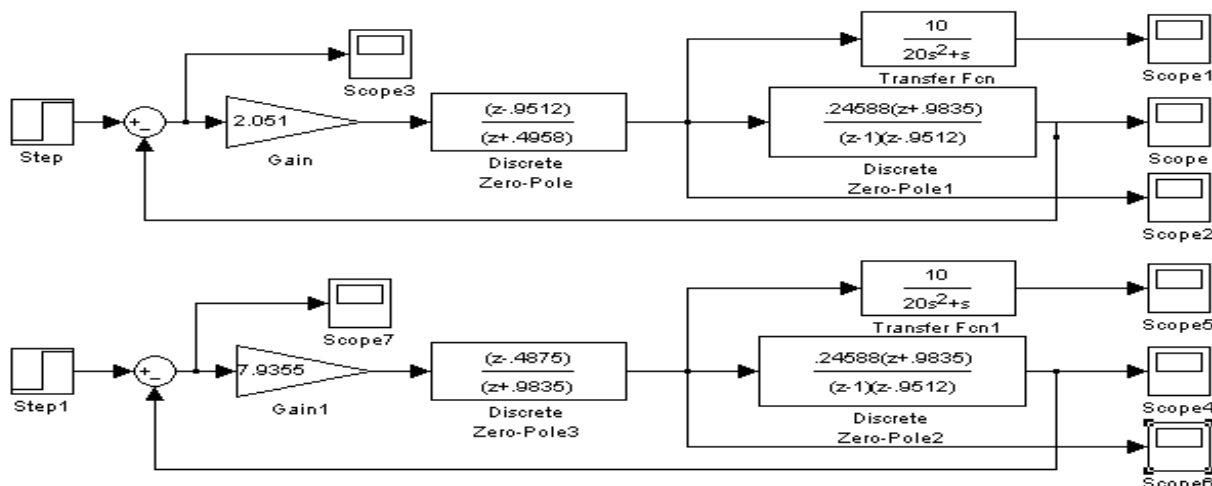
Slabá verze:

$$c(z) = b(z) = z + 0.9835$$

$$\text{Diofantická rovnice: } (z-1)a(z) + K_S K_R d(z) = z^n$$

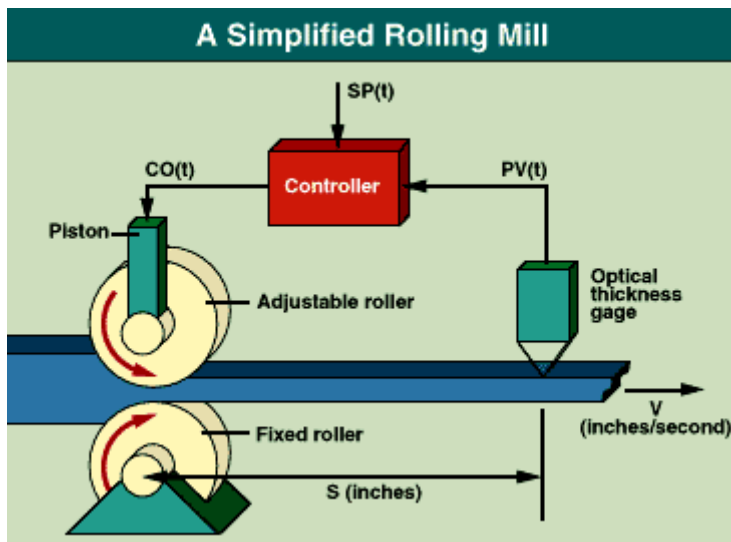
$$(z-1)(z-0.9512) + 0.24588 K_R (z+d_0) = z^2 \rightarrow d_0 = -0.4875, K_R = 7.9355$$

Simulací dle uvedených schémat lze ověřit průběhy diskrétní i spojitě odezvy, regulační odchylky a řízení v silné i slabé verzi. Slabá verze vykazuje zmíněné oscilace spojitě regulované veličiny.



9.13. Návrh regulátorů pro LDS s dopravním zpožděním – Smithův prediktor

Velmi ošidný problém, který je nutno při návrhu zpětnovazebních regulátorů překonat, představují procesy s dopravním zpožděním. S dopravním zpožděním se setkáme zejména u kontinuálních technologických procesů, kde dochází k transportu zpracovávaného materiálu z místa působení akčního orgánu do místa, kde je umístěn snímač regulované veličiny. Vzdálenost mezi těmito místy dělená rychlostí transportu udává hodnotu dopravního zpoždění t_d .



Vysvětlivky:

SP(t) požadovaná hodnota (w(t))
 PV(t).... regulovaný (měřený) výstup y(t)
 CO(t).... řízení u(t)
 S vzdálenost
 V..... rychlost

Piston ...akční orgán, hydraulický servomotor pro přestavování pracovního válce
 Optical thickness gage....optický snímač tloušťky
 Controller regulátor

Ilustrativním příkladem je např. regulace tloušťky plechu na válcovací stolici (viz obrázek).

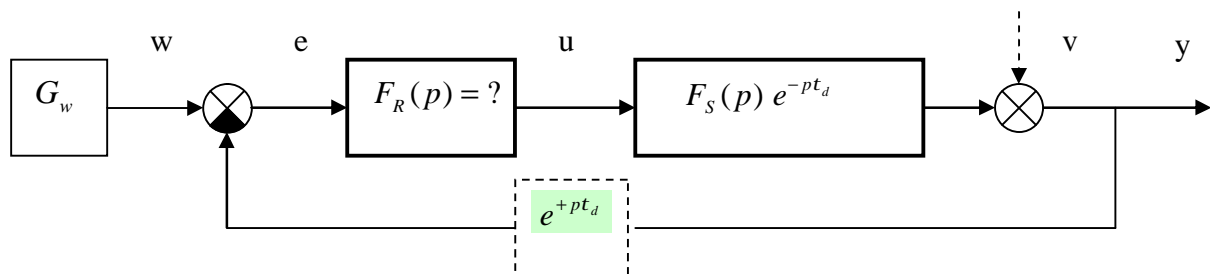
Dopravní zpoždění je příčinou toho, že účinek akčního zásahu může být detekován až po uplynutí této doby a regulátor (obvykle PI nebo PID), nemá informaci o důsledcích svého zásahu na regulovanou veličinu, generuje i nadále řízení s cílem potlačení regulační odchylky. To bude mít za následek, že po uplynutí doby zpoždění odměřená hodnota regulované veličiny bude signalizovat překompenzování požadované hodnoty, a tedy opačné znaménko regulační odchylky, která může mít ještě větší hodnotu než před akčním zásahem. Velikost překompenzování a tendence k nestabilitě bude záviset na tom, jak „agresivně“ jsou nastaveny parametry regulátoru a jak velké je dopravní zpoždění. V tomto směru je kritická zejména integrační složka regulátoru.

Jednu z možností jak upravit nastavení parametrů PI , PID regulátorů při řízení systémů s monotónní přechodovou charakteristikou a s dopravním zpožděním uvádí již Ziegler a Nichols ve svých empirických metodách:

Integrační konstantu K_I vydělit t_d^2 a proporcionální konstantu K vydělit t_d . Derivační konstanta K_D dopravním zpožděním ovlivněna není.

Jinou strategii řízení systémů s dopravním zpožděním volí Smithův prediktor. Strategie vychází z představy, že regulátor by měl mít informaci o dopravním zpoždění, aby v této době nereagoval na základě „starých“ hodnot měřených veličin. Jinak řečeno, regulátor by měl nějakým způsobem získat nezpožděnou informaci o hodnotě regulované veličiny.

Regulaci tloušťky plechu lze znázornit regulačním obvodem dle následujícího schéma:

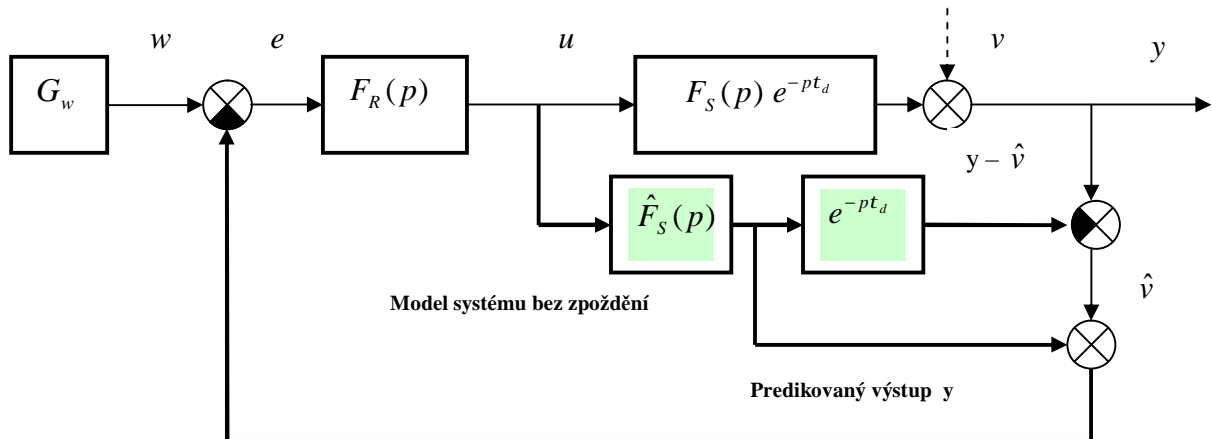


Požadavek na získání informace o nezpožděné hodnotě regulované veličiny bychom mohli hypoteticky získat zařazením (nerealizovatelného) prediktoru s přenosem e^{+pt_d} do zpětné vazby. Přenos uzavřené regulační smyčky by měl tvar (při $v = 0$)

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{F_S(p)F_R(p)e^{-pt_d}}{1 + F_S(p)F_R(p)e^{-pt_d}e^{+pt_d}} = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} e^{-pt_d} \quad (9.117)$$

což znamená, že by se dopravní zpoždění dostalo mimo uzavřenou regulační smyčku.

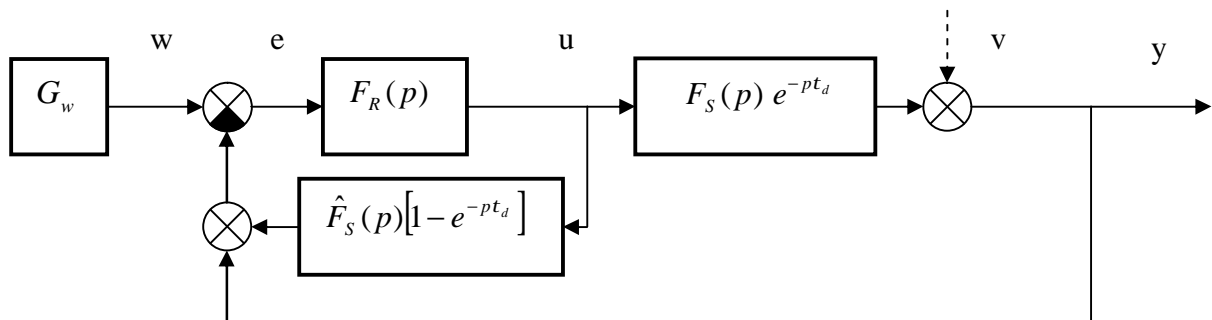
Regulovaná veličina by samozřejmě reagovala se zpožděním na změny referenčního signálu, ale regulátor by bylo možno navrhnout stejným způsobem jako u systémů bez dopravního zpoždění. V podstatě téhož efektu je možno dosáhnout realizovatelnou strukturou **Smithova prediktoru**:



Smithův prediktor obsahuje kromě klasické zpětnovazební smyčky ještě vnitřní smyčku, sestávající z modelu $\hat{F}_S(p)$ řízeného systému se separovaným dopravním zpožděním. Zpětná vazba je tak odvozena od predikovaného výstupu s přičtenou poruchou, ale neobsahuje zpoždění.

Dále ukážeme, že tato strategie bude funkční pouze za idealizovaného, obtížně splnitelného předpokladu, že model bude přesně odpovídat řízenému systému.

Blokové schéma upravíme



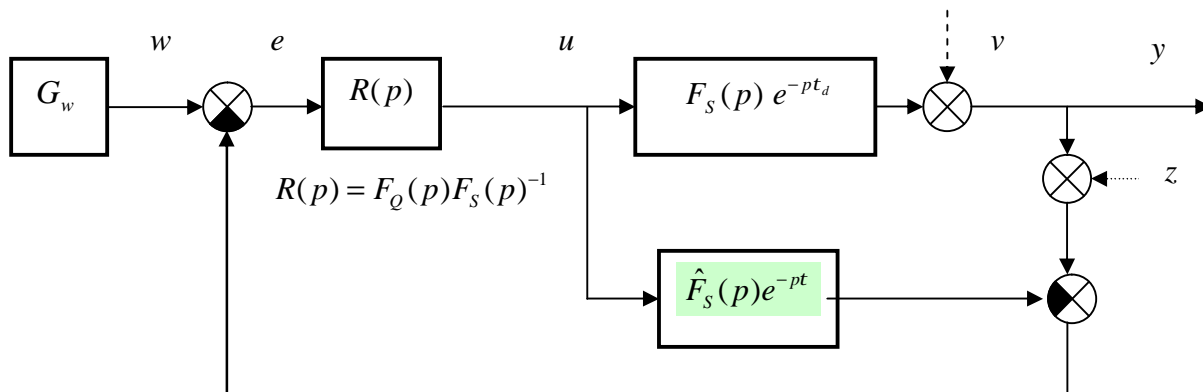
a určíme opět přenos uzavřené regulační smyčky se Smithovým prediktorem:

$$F_{y,w}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{\frac{F_S(p)F_R(p)e^{-pt_d}}{1 + \hat{F}_S(p)F_R(p)[1 - e^{-pt_d}]}}{1 + \frac{F_S(p)F_R(p)e^{-pt_d}}{1 + \hat{F}_S(p)F_R(p)[1 - e^{-pt_d}]}} = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + \hat{F}_S(p)F_R(p)[1 - e^{-pt_d}] + F_S(p)F_R(p)e^{-pt_d}} e^{-pt_d} \quad (9.118)$$

Všimněme si, že při $\hat{F}_S(p) = F_S(p)$ dostáváme přenos uzavřené regulační smyčky s dopravním zpožděním mimo regulační smyčku a přenos odpovídá přenosu (9.117), který byl získán použitím hypotetického prediktoru.

Při použití nepřesného modelu bude regulátor sice dobře řídit fiktivní regulovanou proměnnou, o které dostává informaci prostřednictvím modifikované zpětné vazby, ta však může mít málo společného se skutečnou regulovanou veličinou.

Uvedme ještě variantu Smithova prediktoru **pro stabilní systémy**, která vyplývá z návrhu regulátoru s inverzním modelem systému (invertuje se pouze část přenosové funkce systému bez dopravního zpoždění!)



Závěrečná poznámka ke klasickým metodám návrhu regulátorů:

Mezi metody návrhu regulátorů uvedenými v této kapitole je nutné započítat i frekvenční metody, které byly vysvětleny nebo alespoň naznačeny již v 7. kapitole „Požadavky na regulační obvod a návrhová omezení“.

Jedná se zejména o návrh korekčních článků – regulátorů dle požadované bezpečnosti v zesílení a fázi, potlačení poruch, kmitavosti, resp. návrh regulátorů vycházející z požadavků na tvarování průběhu frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky.

10. REKONSTRUKCE STAVU DETERMINISTICKÉHO SYSTÉMU

V předchozí kapitole jsme při návrhu stavových regulátorů vycházeli z předpokladu, že stav řízeného systému je měřitelný. Zpravidla není možné měřit všechny stavové veličiny (nedostupnost měření, neexistence vhodných čidel, vysoké náklady) a je nutno určit stavové veličiny na základě znalosti modelu řízeného systému a měření vstupních a výstupních veličin na reálném systému.

Z analýzy lineárních systémů víme, že určení vektoru stavu systému na základě měření jeho výstupu je podmíněno pozorovatelností. Nabízí se tak možnost výpočtu vektoru stavu s využitím explicitního řešení výstupní rovnice (LS 1, 5.28):

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(j) + Du(k)$$

Chceme-li však získat aktuální stav ve všech časových okamžicích, je tento postup nevhodný a výpočet neefektivní. Dáváme proto přednost rekurzivnímu algoritmu, který je implementován v podobě dynamického systému – **rekonstruktoru stavu**.

V této kapitole vysvětlíme princip *rekonstrukce stavu*, ukážeme přístupy k návrhu **lineárního asymptotického rekonstruktoru stavu** a budeme analyzovat vlastnosti spojení rekonstruktoru se stavovým regulátorem – **dynamického kompenzátoru**.

10.1. Lineární asymptotický rekonstruktor stavu (spojitá verze)

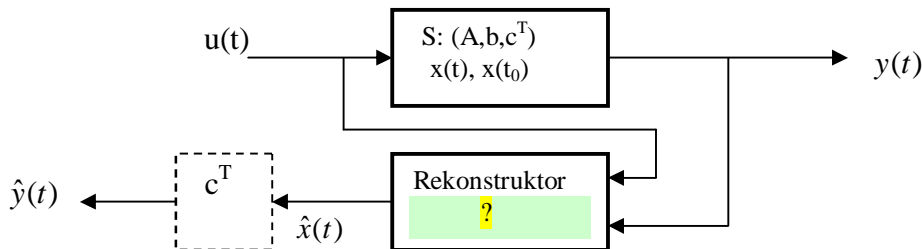
Předpokládejme, že je dán stavový model řízeného spojitého, pozorovatelného SISO systému,

$$S: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(t_0), x(t) \in R^n \text{ jsou neměřitelné, } u(t) \in R^1, y(t) \in R^1 \quad (10.1)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad y(t) \text{ je měřený výstup}$$

jehož měřený vstup a výstup je přiveden do nespécifikovaného bloku rekonstruktoru stavu.

Výstupem tohoto bloku by měl být průběžně rekonstruovaný stav, který označíme $\hat{x}(t)$.



Hledejme odpověď na tři otázky:

- 1/ Jakou strukturu by měl mít rekonstruktor?
- 2/ Jaké vlastnosti by měl mít rekonstruovaný stav $\hat{x}(t)$?
- 3/ Jak navrhnout parametry rekonstruktoru?

Ad1/ *Rekonstruktor stavu je zřejmě dynamický systém, na jehož vstup je přiveden měřitelný vstup $u(t)$ a výstup $y(t)$ řízeného systému a výstupem rekonstruktoru je rekonstruovaný stav $\hat{x}(t)$ resp. rekonstruovaný výstup $\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t)$.*

Z této formulace vyplývá, že rekonstruktor můžeme formálně popsat stavovým modelem:

$$\text{Rek.: } \dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + gu(t) + ky(t), \quad \hat{x}(t_0) \text{ je poč. podmínka rekonstruktoru, } \hat{x}(t_0) \neq x(t_0) \quad (10.2)$$

$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t) \quad F, g, k \text{ jsou prozatím neurčené matice}$$

Pokud zvolíme $\dim \hat{x}(t) = \dim x(t) = n$, budeme hovořit o **úplném rekonstruktoru stavu**.

Jestliže $\dim \hat{x}(t) < \dim x(t)$, hovoříme o **redukovaném rekonstruktoru stavu** (řád rekonstruktoru lze snížit o počet lineárně nezávislých výstupů systému – u SISO systémů tedy o jeden řád).

Ad2/ Od rekonstruovaného stavu budeme požadovat následující vlastnosti:

a/ Rekonstruovaný stav $\hat{x}(t)$ by měl konvergovat ke skutečnému stavu $x(t)$.

b/ Rekonstrukce stavu $\hat{x}(t)$ by neměla záviset na vstupu $u(t)$ a na stavu $x(t)$, ve kterém se řízený systém nachází.

Ad3/ Definujme **chybu rekonstrukce** $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.

Pro návrh úplného asymptotického rekonstruktoru stavu musíme požadovat, aby

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (10.3)$$

Časový vývoj chyby rekonstrukce $e(t)$ dostaneme po její formální časové derivaci a dosazení rovnice systému a rekonstruktoru

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = F\hat{x}(t) + gu(t) + ky(t) - Ax(t) - bu(t) + Fx(t) - Fx(t) \quad (10.4)$$

Po úpravě vidíme, že chybu rekonstrukce generuje fiktivní dynamický systém

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + (F - A + kc^T)x(t) + (g - b)u(t), \quad e(0) \neq 0 \quad (10.5)$$

Požadavky Ad2/ na rekonstruovaný stav $\hat{x}(t)$ jsou současně požadavky na chybu rekonstrukce $e(t)$. Požadovanou nezávislost rekonstruovaného stavu $\hat{x}(t)$ na vstupu $u(t)$ a stavu $x(t)$ zaručíme, jestliže položíme $(F - A + kc^T) = 0$ a $(g - b) = 0$.

Musí tedy platit: $F = A - kc^T$ a $g = b$, kde k zůstává prozatím neurčenou maticí $n \times 1$.

Fiktivní dynamický systém pro chybu rekonstrukce se stává autonomním systémem, který reaguje jen na nenulové počáteční podmínky

$$\dot{e}(t) = Fe(t), \quad e(t_0) = \hat{x}(t_0) - x(t_0) \neq 0 \Rightarrow \hat{x}(t_0) \neq x(t_0) \quad (10.6)$$

Tento systém musí být stabilní, aby bylo splněno (10.3).

Stabilita je dána umístěním vlastních čísel matice $F = A - kc^T$, respektive umístěním pólů odpovídajícího charakteristického polynomu $\det(pI - A + kc^T)$.

Volbou požadovaného umístění pólů p_i^* , $i = 1, \dots, n$ a porovnáním polynomů

$$\det(pI - A + kc^T) = \prod_{i=1}^n (p - p_i^*) = p^n + a_{n-1}^* p^{n-1} + \dots + a_1^* p + a_0^* \quad (10.7)$$

určíme matici k , a tedy i $F = A - kc^T$,

Rovnici navrženého rekonstruktoru získáme dosazením $F = A - kc^T$ a $g = b$ do (10.2):

$$\begin{aligned} \text{Rek: } \dot{\hat{x}}(t) &= (A - kc^T)\hat{x}(t) + bu(t) + ky(t), \quad \hat{x}(t_0) \\ \hat{y}(t) &= c^T \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (10.8)$$

Používanější tvar rekonstruktoru získáme po úpravě

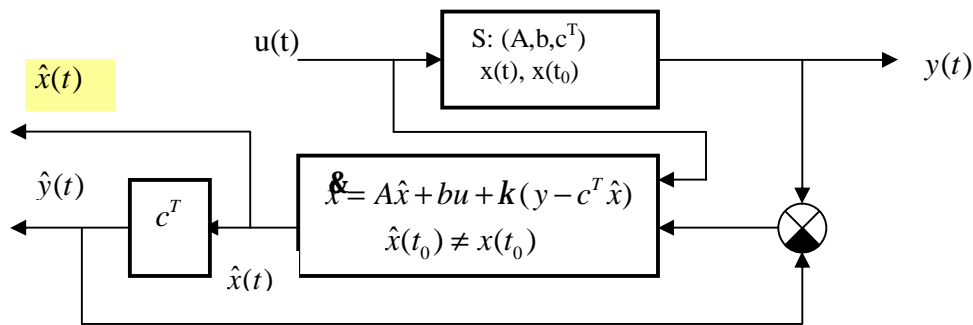
$$\begin{aligned} \text{Rek: } \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + bu(t) + k[y(t) - c^T \hat{x}(t)], \quad \hat{x}(t_0) \\ \hat{y}(t) &= c^T \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (10.9)$$

Z této struktury vyplývá důležitá interpretace rekonstruktoru:

Rekonstruktor je paralelní model systému řízený „inovační vazbou“, získanou z rozdílu měřené hodnoty $y(t)$ a rekonstruovaného výstupu $\hat{y}(t)$, násobeného „ziskovou maticí rekonstruktoru“ k .

Rekonstrukce je nefunkční pro $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ a rekonstruktor je pouze paralelním modelem systému.

Blokové schéma rekonstrukce stavu:



Lineární asymptotický rekonstruktor stavu (diskrétní verze)

Pro pozorovatelný diskrétní lineární dynamický systém s neměřitelným stavem

$$S: \quad x(k+1) = Ax(k) + bu(k); \quad x(0), x(k) \in R^n, u(k), y(k) \in R^1, k = 0, 1, \dots \quad (10.10)$$

$$y(k) = c^T x(k)$$

Ize analogickým způsobem odvodit rovnici úplného diskrétního rekonstruktora stavu

$$\text{Rek.:} \quad \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + bu(k) + k[y(k) - c^T \hat{x}(k)]; \quad \hat{x}(0) \neq x(0), k = 0, 1, \dots \quad (10.11)$$

$$\hat{y}(k) = c^T \hat{x}(k)$$

a určit ziskovou matici rekonstruktora k .

Stručná charakteristika diskrétní verze rekonstrukce stavu:

- V diskrétní verzi můžeme kromě asymptotické rekonstrukce stavu požadovat rekonstrukci ve smyslu konečného počtu kroků rekonstrukce.
- Stavová rovnice diskrétního rekonstruktora nabízí interpretaci rekonstruktora jako prediktoru rekonstruovaného stavu o jeden krok: $\hat{x}(k) \rightarrow \hat{x}(k+1)$.
- Rekurzivní algoritmus rekonstrukce stavu vyplývá přímo z rovnic rekonstruktora.

Spojité i diskrétní rekonstruktor můžeme použít i pro rekonstrukci stavu nestabilního systému (chyba rekonstrukce e je stabilní).

Příklad 10.1: Navrhněte úplný asymptotický rekonstruktor stavu pro nestabilní spojité LDS, popsany přenosem

$$F_s(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p^2-1}. \quad \text{Póly rekonstruktora zvolte } p_1^* = p_2^* = -2.$$

Funkci rekonstruktora ověřte simulací při jednotkovém skoku na vstupu a při volbě počátečních podmínek rekonstruktora $\hat{x}_1(0) = -3, \hat{x}_2(0) = 2$.

Řešení:

1/ Určíme Frobeniovu stavovou reprezentaci systému: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c^T = [2 \quad 1]$

2/ Určíme matici dynamiky rekonstruktora (10.8):

$$A - kc^T = \begin{bmatrix} -2k_1 & 1 - k_1 \\ 1 - 2k_2 & -k_2 \end{bmatrix}; \quad k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

3/ Ziskovou matici rekonstruktora k určíme porovnáním

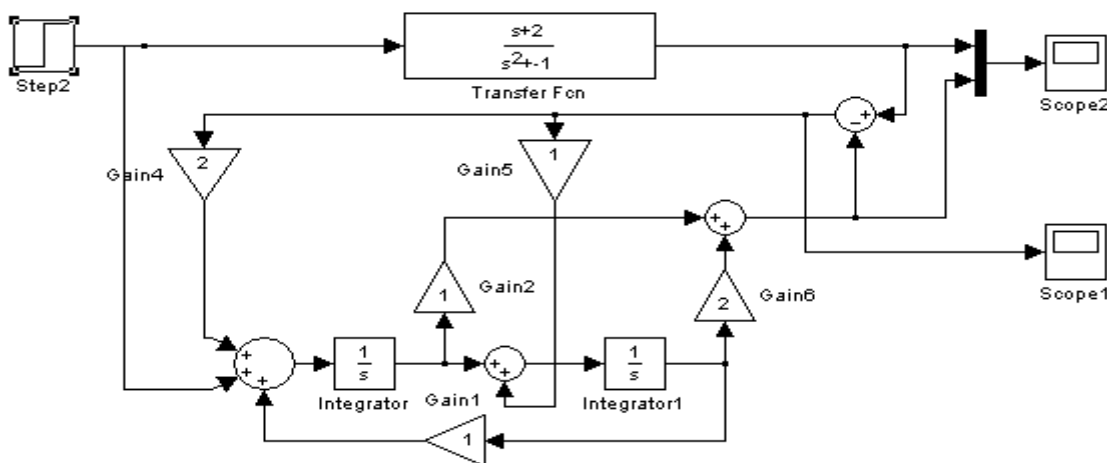
$$\det(pI - A + kc^T) = (p+2)^2 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

Rovnice rekonstruktora: $\dot{\hat{x}}(t) = (A - kc^T)\hat{x}(t) + bu(t) + ky(t), \quad \hat{x}(0) \neq x(0)$
 $\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t)$

nebo $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + k[y(t) - c^T \hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) \neq x(0)$
 $\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t)$

Simulační schéma systému s rekonstruktorem

Osciloskopy zobrazují měřený výstup systému v porovnání s rekonstruovaným výstupem a chybu rekonstrukce výstupu. Rekonstruovaný stav je na výstupech integrátorů.



10.2. Redukovaný rekonstruktor stavu (Luenbergerův, minimální)

Protože z měřeného výstupu systému získáváme vždy informaci o stavu systému, není nutné navrhovat rekonstruktor s řádem rovnajícím se dimenzi vektoru stavu systému. Obecně lze řád rekonstruktora snížit o počet nezávisle měřených výstupů systému. Počet nezávisle měřených výstupů je také určen rozměrem největší regulární submatice v matici výstupu C.

Uvažujme spojitý, pozorovatelný LDS s r vstupy a p výstupy

S: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0), x(t) \in R^n$ jsou neměřitelné, $u(t) \in R^r, y(t) \in R^p$ (10.12)
 $y(t) = Cx(t)$

Předpokládejme, že $C = [C_1 \ C_2]$, kde $C_1 \dots px(n-p)$ a $C_2 \dots ppx$ je regulární submatice. Potom systém S bude mít p nezávisle měřených složek vektoru výstupu y(t) a redukovaný rekonstruktor může mít minimální řád n - p.

Převědeme-li systém S(A, B, C) transformací stavových proměnných $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} = Tx(t)$ na ekvivalentní stavovou reprezentaci $\bar{S}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, ve které bude p složek výstupu systému y(t) přímo ztotožněno s p složkami subvektoru stavu $\bar{x}_2(t)$, navrhne rekonstruktor pouze pro zbylých n - p složek $\bar{x}_1(t)$ vektoru stavu $\bar{x}(t)$.

Z uvedeného vyplývá, že regulární transformační matice ekvivalence T a T⁻¹ mají tvar

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C_2^{-1}C_1 & C_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

Maticy $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ ekvivalentní stavové reprezentace jsou dány transformačními vztahy

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1} = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C_2^{-1}C_1 & C_2^{-1} \end{bmatrix} = [0 \quad I] \quad (10.14)$$

Po transformaci dostaneme ekvivalentní systém

$$\bar{S}: \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), & \bar{x}(t_0), \bar{x}(t) \in R^n, u(t) \in R^r, y(t) \in R^p \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t), \end{cases} \quad (10.15)$$

přičemž $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$, $\bar{C} = [0 \quad I]$, $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}$, $\bar{x}_1(t) \in R^{n-p}$, $\bar{x}_2(t) \in R^p$

Respektujeme-li rozložení stavu $\bar{x}(t)$ na subvektory $\bar{x}_1(t)$ a $\bar{x}_2(t)$, mají systémové rovnice tvar

$$\bar{S}: \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_1u(t), & \bar{x}_1(t_0) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_2u(t), & \bar{x}_2(t_0) \\ y(t) = \bar{x}_2(t) \end{cases} \quad (10.16)$$

Vzhledem k výstupní rovnici $y(t) = \bar{x}_2(t)$, můžeme druhou stavovou rovnici přepsat

$$\bar{S}: \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{12}y(t) + \bar{B}_1u(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22}y(t) + \bar{B}_2u(t) \end{cases} \quad (10.17)$$

Protože v této reprezentaci je p složek vektoru stavu přímo měřeno výstupem $y(t) = \bar{x}_2(t)$, potřebujeme navrhnout rekonstruktor pouze pro $\bar{x}_1(t)$. Všimněme si, že druhá rovnice v (10.17) obsahuje informaci o $\bar{x}_1(t)$, kterou lze získat pozorováním (u, y, \dot{y}) :

$$\bar{A}_{21}\bar{x}_1 = \dot{y} - \bar{A}_{22}y - \bar{B}_2u \quad (10.18)$$

Tuto informaci využijeme v redukovaném rekonstruktoru stavu v “inovační vazbě” - analogicky jako u úplného rekonstruktora.

Redukovaný rekonstruktor (dim $\hat{x}_1 = n - p$) je popsán rovnicí

$$\text{Rek.: } \dot{\hat{x}}_1(t) = \bar{A}_{11}\hat{x}_1(t) + \bar{A}_{12}y(t) + \bar{B}_1u(t) + k \left(\bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) - \bar{A}_{21}\hat{x}_1(t) \right), \quad \hat{x}_1(t_0) \neq \bar{x}_1(t_0) \quad (10.19)$$

kde k je prozatím neurčená zisková matice rekonstruktora $(n-p) \times p$.

Z (10.17) a (10.19) zjistíme, že pro **chybu rekonstrukce** $e_1(t) = \hat{x}_1(t) - \bar{x}_1(t)$ platí

$$\dot{e}_1(t) = (\bar{A}_{11} - k \bar{A}_{21})e_1(t) \quad (10.20)$$

Tento systém musí být stabilní, aby byl splněn požadavek na asymptotickou rekonstrukci stavu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_1(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_1(t) = 0 \quad (10.21)$$

Rychlost rekonstrukce lze ovlivnit umístěním vlastních čísel matice $(\bar{A}_{11} - k \bar{A}_{21})$, respektive umístěním pólů odpovídajícího charakteristického polynomu $\det(pI - \bar{A}_{11} + k \bar{A}_{21})$.

Ziskovou matici rekonstruktora k lze určit z požadovaného umístění pólů p_i^* , $i=1, \dots, n-p$, porovnáním polynomů

$$\det(pI - \bar{A}_{11} + k \bar{A}_{21}) = \prod_{i=1}^{n-p} (p - p_i^*) = p^{n-p} + a_{n-p-1}^* p^{n-p-1} + \dots + a_1^* p + a_0^* \quad (10.22)$$

Pro vlastní realizaci redukovaného rekonstruktoru upravíme (10.19) dosazením za zprostředkovaně měřené $\bar{A}_{21}\bar{x}_1$ z (10.18):

$$\text{Rek.: } \dot{\hat{x}}_1(t) = \bar{A}_{11}\hat{x}_1(t) + \bar{A}_{12}y(t) + \bar{B}_1u(t) + k(\hat{x}_1(t) - \bar{A}_{22}y(t) - \bar{B}_2u(t) - \bar{A}_{21}\hat{x}_1(t)) \quad (10.23)$$

Eliminujme ještě nevhodnou derivaci výstupní veličiny zavedením nové proměnné $\hat{v}(t)$:

$$\hat{v}(t) = \hat{x}_1(t) - ky(t) \rightarrow \dot{\hat{v}} = \dot{\hat{x}}_1 - k\dot{y} \text{ a } \hat{x}_1 = \hat{v} + ky \quad (10.24)$$

Po dosazení a úpravě dostáváme rovnici redukovaného rekonstruktoru

$$\text{Rek.: } \dot{\hat{v}}(t) = (\bar{A}_{11} - k\bar{A}_{21})\hat{v}(t) + (\bar{B}_1 - k\bar{B}_2)u(t) + (\bar{A}_{11}k + \bar{A}_{12} - k\bar{A}_{22} - k\bar{A}_{21}k)y(t) \quad (10.25)$$

Rekonstruktor generuje *rekonstruovanou část* vektoru stavu $\hat{x}_1(t) = \hat{v}(t) + ky(t)$,

kteřou doplňuje *přímo měřitelná část* - výstup $\hat{x}_2(t) = y(t)$

V původních souřadnicích: $\hat{x}(t) = T^{-1}\hat{\bar{x}}(t)$

Příklad 10.2:

Navrhněte *minimální asymptotický rekonstruktor* stavu pro systém s přenosem $F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p^2 + \sqrt{2} + 2}$.

Systém s rekonstruktorem namodelujte a ověřte funkci rekonstruktoru simulací při jednotkovém skoku na vstupu a pro zvolené počáteční podmínky na systému a rekonstrukturu.

Řešení:

1/ Systém převedeme do Frobeniovy stavové reprezentace $S(A, b, c^T)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

2/ Systém S má měřený výstup $y(t)$ odvozen jako lineární kombinace obou složek vektoru stavu, ale z měřitelného výstupu vyplývá, že minimální řád rekonstruktoru je 1.

3/ Transformací stavových proměnných $\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ do ekvivalentní stavové reprezentace

$\bar{S}(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$ bude výstup systému $y(t)$ ztotožněn s $\bar{x}_2(t)$ a rekonstruovat budeme pouze $\bar{x}_1(t)$.

Regulární transformační matice ekvivalence T a T^{-1} mají podle (10.13) tvar: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4/ Po transformaci dostáváme ekvivalentní systém $\bar{S}(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3.17 & 0.58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Protože v této reprezentaci je $y(t) = \bar{x}_2(t)$, navrhne rekonstruktor pouze pro $\bar{x}_1(t)$.

5/ Podle (10.25) je upravená rovnice rekonstruktoru

$$\dot{\hat{v}}(t) = (\bar{a}_{11} - k\bar{a}_{21})\hat{v}(t) + (\bar{b}_1 - k\bar{b}_2)u(t) + (\bar{a}_{11}k + \bar{a}_{12} - k\bar{a}_{22} - k\bar{a}_{21}k)y(t), \text{ kde } \hat{v}(t) = \hat{x}_1(t) - ky(t)$$

Po dosazení parametrů ekvivalentního systému dostáváme rovnici rekonstruktoru

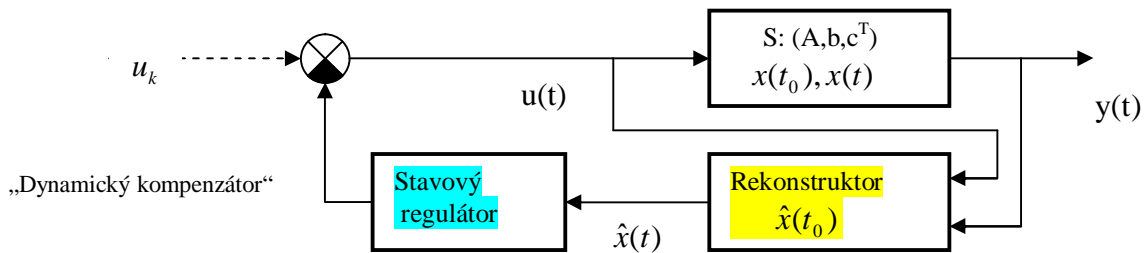
$$\dot{\hat{v}}(t) = (-2 + 3.17k)\hat{v}(t) + (1 - k)u(t) + (k + 1 - 0.58k + 3.17k^2)y(t), \quad \hat{v}(t) = \hat{x}_1(t) + 2y(t), \quad \hat{v}(0)$$

6/ Ziskovou matici k určíme z požadovaného umístění vlastního čísla matice dynamiky rekonstruktoru, tj. umístěním pólů odpovídajícího charakteristického polynomu $\det(p - \bar{a}_{11} + k\bar{a}_{21}) = \det(p + 2 - 3.17k)$.

Volba $k = -2$ vede na rovnici rekonstruktoru se stabilním pólem $p^* = -8.34$:

10.3. Lineární stavový regulátor s rekonstruktorem stavu

Analyzujeme nyní situaci, kdy z důvodu neměřitelnosti stavu $x(t)$ na reálném systému bude pro již navržený stavový regulátor použit rekonstruovaný stav $\hat{x}(t)$.



Především musíme zjistit, jaké důsledky způsobí náhrada skutečného stavu rekonstruovaným stavem, jak se změní vlastnosti uzavřeného systému a zda je přípustné provést odděleně návrh stavového regulátoru a rekonstruktoru stavu.

Stavový regulátor s úplným rekonstruktorem stavu je dynamický regulátor, řád uzavřeného systému je dán součtem řádu systému a rekonstruktoru ($2n$). Dynamický regulátor, na rozdíl od stavového regulátoru, by měl zavést do přenosu uzavřeného systému i nuly.

Uvažujme říditelný a pozorovatelný SISO systém:

$$S: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(t_0), x(t) \in R^n \text{ jsou neměřitelné, } u(t), y(t) \in R^1 \quad (10.26)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

Systém je řízen lineárním stavovým regulátorem,

$$\text{Reg.: } u(t) = -k^T \hat{x}(t) + u_k(t) \quad (10.27)$$

který využívá rekonstruovaný stav $\hat{x}(t)$, získaný z rekonstruktoru stavu.

Abychom mohli analyzovat vlastnosti stavového regulátoru s rekonstruktorem, určíme stavový popis uzavřeného systému, který musí být $2n$ -tého řádu. Za stavové proměnné zvolíme s výhodou $x, \hat{x} - x$ respektive x, e (snadno lze dokázat, že popis je ekvivalentní s popisem při volbě x, \hat{x}).

Po dosazení za $u(t)$ do (10.26) a úpravě dostaneme stavovou rovnici

$$\dot{\mathfrak{x}}(t) = Ax(t) - bk^T \hat{x}(t) + bu_k(t) + bk^T x(t) - bk^T x(t) = (A - bk^T)x(t) - bk^T e(t) + bu_k(t),$$

kterou doplníme o stavovou rovnici pro chybu rekonstrukce (10.6)

$$\dot{e}(t) = (A - kc^T)e(t)$$

Stavový popis uzavřeného systému uvedeme v maticovém tvaru:

$$S_z: \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathfrak{x}}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk^T & -bk^T \\ 0 & A - kc^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u_k(t); \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ e(t_0) \end{bmatrix} \quad (10.28)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

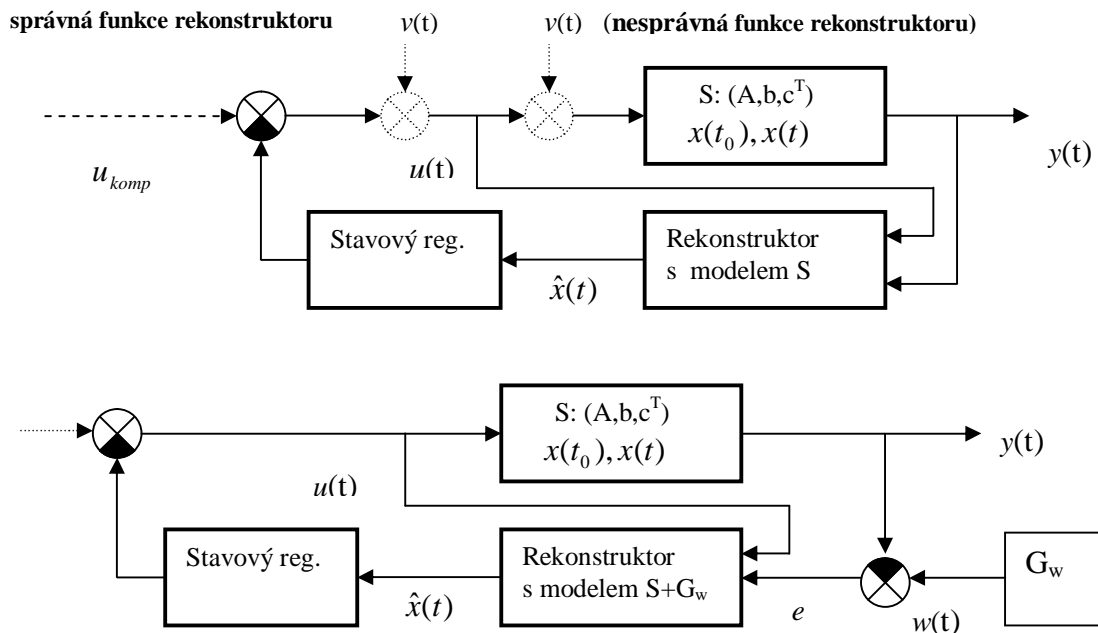
Vlastnosti stavového regulátoru s rekonstruktorem (dynamického kompenzátoru):

- 1/ Matice dynamiky uzavřeného systému je horní trojúhelníkovou maticí a její vlastní čísla jsou na diagonále. Z toho vyplývá, že návrh stavového regulátoru - umístění vlastních čísel $A - bk^T$ a návrh rekonstruktoru stavu - umístění vlastních čísel $A - kc^T$ jsou separovatelné úlohy, které mohou být řešeny nezávisle.
- 2/ Uzavřený systém není úplně říditelný (není říditelný subsystém chyby rekonstrukce), což znamená, že v přenosu uzavřeného systému, který je definován při nulových počátečních podmínkách, musí dojít ke krácení nul a pólů. Lze dokázat, že se krátí zavedené nuly s póly rekonstruktoru, které ovlivňují pouze odeznívání počátečních podmínek.
- 3/ Z předchozího vyplývá, že v ustáleném stavu je chování systému s dynamickým kompenzátozem stejné jako při řízení systému stavovým regulátorem, který využívá skutečný stav systému.

10.4. Dynamický kompenzátor v regulačních úlohách.

Pro správnou funkci rekonstruktoru a tedy i dynamického kompenzátoru je nutné dodržet dvě důležité podmínky:

- 1/ Na vstup rekonstruktoru musí být přiveden stejný vstupní signál jako na řízený systém
- 2/ Model systému obsažený v rekonstruktoru musí být modelem toho systému, jehož stav pozorujeme výstupem přivedeným na vstup rekonstruktoru.



Výstup přiváděný na vstup rekonstruktoru „pozoruje“ stav systému $S+G_w$!!

Předchozí blokové schéma využijeme pro ilustraci regulace na konstantní hodnotu $w(t) = 1[t]$.

Stavový model řízeného systému:

$$S: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(t_0), x(t) \in R^n \text{ jsou neměřitelné, } u(t), y(t) \in R^1 \quad (10.29)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

Stavový model systému generujícího $w(t) = 1[t]$:

$$G_w: \quad \dot{x}_w(t) = 0; \quad x_w(t_0) = 1, \quad x_w(t) \in R^1 \quad (10.30)$$

$$w(t) = x_w(t)$$

Stavový model „rozšířeného systému“ $S+G_w$:

$$S+G_w: \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.31)$$

$$e(t) = \begin{bmatrix} -c^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix}$$

Výstupem je regulační odchylka $e = w - y = x_w - c^T x$, která je přiváděna na vstup rekonstruktoru.

Pro „rozšířený systém“ navrhne lineární stavový regulátor :

$$\text{Reg.: } u(t) = -k_r^T x_r(t) = -\begin{bmatrix} k^T & k_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{bmatrix}, \quad k^T \dots 1 \times n, \quad k_w \dots 1 \times 1 \quad (10.32)$$

Zpětnovazební matici regulátoru k_r^T navrhne z požadavku na umístění pólů uzavřeného systému, což odpovídá požadovanému umístění vlastních čísel matice $(A_r - b_r k_r^T)$.

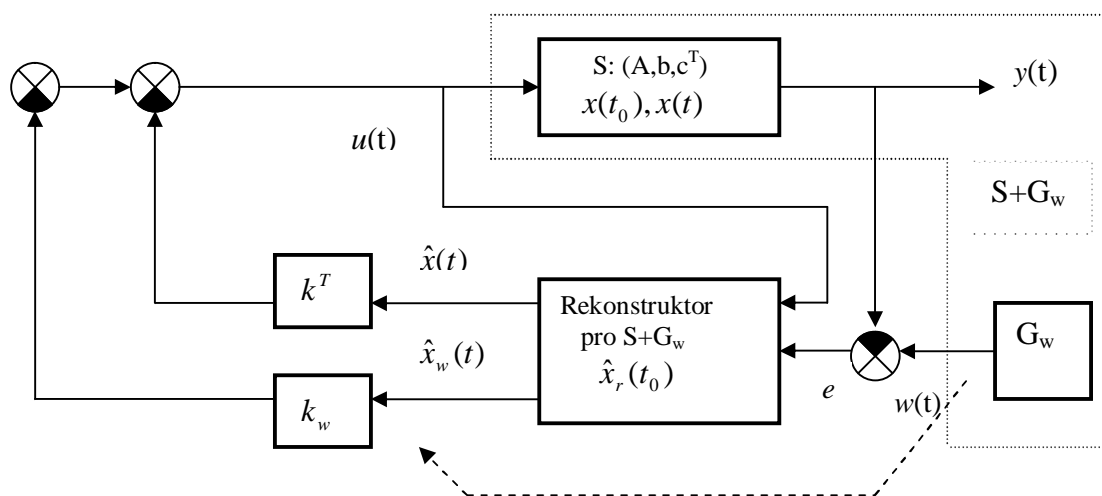
Navrhne úplný asymptotický rekonstruktor pro stav "rozšířeného systému" $\hat{x}_r(t)$:

$$\text{Rek.: } \dot{\hat{x}}_r(t) = A_r \hat{x}_r(t) + b_r u(t) + k_r [e(t) - c_r^T \hat{x}_r(t)]; \hat{x}_r(t_0), k_r = \begin{bmatrix} k \\ k_w \end{bmatrix}, \hat{x}_r = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}_w \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

$$\hat{e}(t) = c_r^T \hat{x}_r(t) \quad k \dots n \times 1, k_w \dots 1 \times 1$$

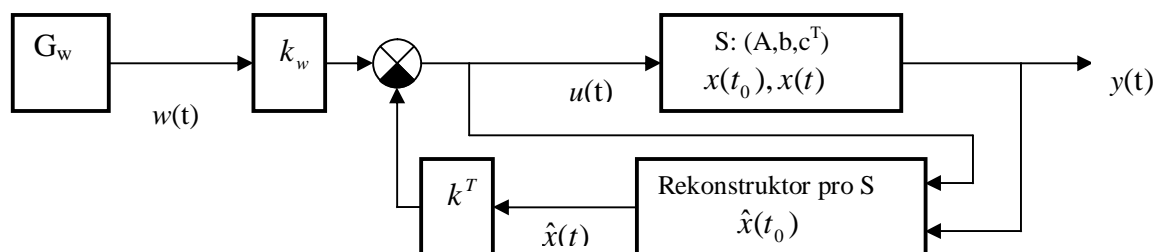
Ziskovou matici rekonstruktoru k_r určíme z požadovaného umístění vlastních čísel $(A_r - k_r c_r^T)$. Jejich reálné části volíme "vlevo" od reálných částí vlastních čísel matice $(A_r - b_r k_r^T)$.

Po náhradě neměřitelného stavu $x_r(t)$ rekonstruovaným stavem $\hat{x}_r(t)$ dostáváme blokové schéma:



Pokud je stav $x_w(t)$ systému G_w měřitelný (v našem případě $w(t) = x_w(t)$), není nutná jeho rekonstrukce a může být použit namísto $\hat{x}_w(t)$ (v blokovém schéma naznačeno čárkovaně).

Této situaci odpovídá blokové schéma,



kteřé je strukturálně podobné schématu pro návrh lineárního stavového regulátoru s kompenzací statického zesílení (viz odstavec 8.4.).

Konstanta k_w je určena z podmínky jednotkového zesílení přenosu uzavřeného systému.

Analogickým způsobem lze navrhnout dynamický kompenzátor při působení výstupní poruchy $v(t)$, generované systémem G_v .

Rozšířeným systémem by v takovém případě byl model systému spolu s modelem generátoru poruchy.

11. NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

Při určování matematických modelů reálných systémů na základě matematicko-fyzikálního modelování (LS1, Kap.1) jsme ukázali, že jejich popis obvykle vede na nelineární diferenciální rovnici či soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Neexistence obecné teorie nelineárních dynamických systémů nás vedla k použití lineárních modelů, získaných linearizací v rovnovážných nebo ustálených stavech (pracovních bodech) nelineárního dynamického systému. Propracovaná teorie lineárních dynamických systémů, těžící zejména z platnosti principu superpozice, existence obecného řešení lineárních diferenciálních rovnic a z možnosti využití transformačních modelů získaných použitím Laplaceovy, Fourierovy a Z-transformace nám poskytla dostatek nástrojů pro analýzu a syntézu LDS, nemáme však jistotu, že získané výsledky při aplikaci na reálný nelineární dynamický systém budou skutečně použitelné.

To neznamená, že musíme linearizaci zahrnout - je však důležité uvědomit si její omezení:

- 1/ Při analýze nelineárního systému na základě linearizace v okolí pracovního bodu dostáváme pouze lokální a nikoliv globální představu o jeho chování.
- 2/ Dynamika nelineárního systému je mnohem bohatší než u lineárního systému, neboť mohou nastat takové jevy, které jsou vázány pouze na existenci nelinearity a nelze je tedy popsat či predikovat ze znalosti linearizovaného modelu.

Některé typicky nelineární jevy ve srovnání s LDS:

- a/ U nestabilního nelineárního systému může stav nabýt nekonečné hodnoty v konečném čase!
Stav nestabilního LDS roste nade všechny meze pro čas limitující k nekonečnu.
- b/ Nelineární systém může mít více rovnovážných stavů, stabilita nelineárního systému obecně závisí na počátečních podmínkách. LDS může mít jen jeden izolovaný rovnovážný stav, který je buď stabilní či nestabilní pro všechny počáteční podmínky.
- c/ U nelineárních systémů může existovat izolovaný mezný cyklus, který odpovídá periodickému řešení a projevuje se vznikem oscilací (samobuzených kmitů, autooscilací), které nezávisí na počátečních podmínkách. Naopak, periodické řešení u lineárních systémů není izolovaným mezným cyklem. Vyžaduje existenci dvojice ryze imaginárních vlastních čísel, závisí na počátečních podmínkách a není robustní vzhledem k poruchám.
- d/ Nelineární systém je z frekvenčního hlediska spektrálním převodníkem:
Při vybuzení vstupu harmonickým signálem se na výstupu mohou objevit vyšší harmonické i subharmonické frekvence. U lineárního systému se při průchodu harmonického signálu frekvence nemění.
- e/ U nelineárních systémů může nastat chaos.
Jedná se o ustálený stav, který není ani rovnovážným stavem ani periodickým řešením. Chaotické chování vykazuje prvky náhodnosti, byť se jedná o deterministický systém.
- f/ Stejný nelineární systém může vykazovat více druhů chování v závislosti na počátečních podmínkách a vstupním signálu. Na spojité změny amplitudy či frekvence vstupního signálu může reagovat nespojitými skoky a pod.

Z uvedeného přehledu je zřejmé, že u nelineárních systémů nelze řešit celou šíři problémů najednou, a proto se rozpracovávají metody pro řešení dílčích, ale zásadních problémů.

Jedná se např. o problém exaktní zpětnovazební linearizace (hledá se nelineární zpětnovazební řízení, které by převedlo nelineární systém na lineární), hledají se metody pro analýzu vzniku mezných cyklů, chaosu, metody pro analýzu stability, stabilizaci a řízení nelineárních dynamických systémů a další.

Dílčími problémy z oblasti analýzy nelineárních dynamických systémů, které mají užší vztah k přednesené látce z oblasti lineárních systémů (*lineární systémy ve spojení se statickou nelinearitou, metoda harmonické linearizace, vznik autooscilací, Ljapunovova teorie stability*) se budeme okrajově zabývat v následujících odstavcích.

Připomeňme si nejprve stručně matematické modely používané pro popis nelineárních dynamických systémů a zrekapitulujme poznatky z linearizace nelineárních systémů v okolí rovnovážných stavů či pracovních bodů.

11.1. Matematické modely nelineárních dynamických systémů

V 1. kapitole jsme ukázali, že spojitéj jednorozměrový nelineární t-invariantní dynamický systém může být popsán nelineárními diferenciálními rovnicemi n -tého řádu,

$$S: \dot{y}^{(n)}(t) = f[y(t), \mathbf{x}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t)]; \quad y(t_0), \mathbf{x}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0), \quad f(\cdot) \text{ je nelineární funkce} \quad (11.1)$$

kteou lze vhodnou volbou stavových proměnných $x_1(t), \dots, x_n(t)$ převést na stavový model, popsáný soustavou n nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s výstupní rovnicí

$$S: \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)]; \quad x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u, y \in \mathbb{R}^1 \quad (11.2)$$

\mathbf{N}

$$\dot{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{f}_n[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)]$$

$$y(t) = h[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)]$$

Ve vektorovém zápisu je stavový model popsán

$$S: \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[x(t), u(t)]; \quad x(t_0) \quad (11.3)$$

$$y(t) = h[x(t), u(t)]$$

nebo v ekvivalentní tzv. “kauzálně separabilní formě”, používané např. při zmíněné exaktní zpětnovazební linearizaci nelineárních dynamických systémů

$$S: \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u(t); \quad x(t_0) \quad (11.4)$$

$$y(t) = h[x(t), u(t)]$$

Linearizovaný model $S(A, b, c^T, d)$, aproximující chování nelineárního systému (11.3) v okolí jeho rovnovážných stavů či pracovních bodů, jsme určili použitím Taylorova rozvoje při zanedbání vyšších členů rozvoje. Matice A, b, c^T, d byly určeny dosazením rovnovážného stavu do Jacobiových matic $\frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial u}, \frac{\partial h(\cdot)}{\partial x}, \frac{\partial h(\cdot)}{\partial u}$.

Připomeňme, že predikce chování nelineárního systému v okolí rovnovážného stavu na základě znalosti jeho linearizovaného modelu byla možná pro případ rovnovážných stavů typu uzlu, ohnisko (stabilní či nestabilní) a sedlo, ale nikoliv pro typ střed (vlastní čísla matice A na imaginární ose). V tomto případě o chování nelze rozhodnout, což je příkladem omezení použitelnosti linearizace, zmíněné v úvodní části této kapitoly.

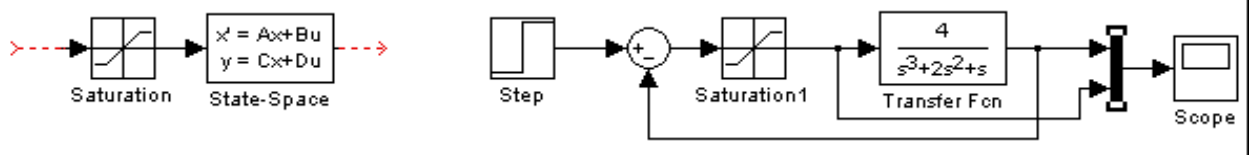
*Speciální třídu nelineárních systémů tvoří **lineární systémy se statickou nelinearitou**, která se nejčastěji vyskytuje na vstupu systému. Nelinearita bývá nežádoucí vlastností akčního orgánu, ale také ji můžeme využít cíleně, např. v **reléových regulačních obvodech**. Ty používají jako akční orgán nelineární prvek typu relé. Předností regulačních prvků typu relé (ideální dvoupolohové relé, relé s necitlivostí, s hysterezí aj.) je jednoduchost, malá hmotnost i rozměrnost a spolehlivost. Jsou levnější než spojité regulátory a bývají používány při řešení jednoduchých regulačních úloh. Regulační pochody však nebývají příliš příznivé, objevují se sklony k nestabilitě a ke vzniku **mezných cyklů – autooscilací**.*

Některé typické nelinearity:

Necitlivost relé (s hysterezí nebo bez) nasycení (saturace) Coulombovo tření “vůle v zubech”



Uvažujme např. statickou nelinearitu typu saturace (nasyčení) na vstupu LDS (obr. vlevo).



Vytvoříme-li jednoduchý regulační obvod zavedením jednotkové záporné zpětné vazby, lze uzavřený systém popsat stavovým modelem

$$S_z: \dot{x}(t) = Ax(t) + b \text{sat}(e); \quad \text{kde } e = w - y \text{ je regulační odchylka} \quad (11.5)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

V uzavřeném systému může nastat mezný cyklus, který se projeví trvalými oscilacemi.

Na předchozím obrázku vpravo je motivační příklad demonstrující vznik oscilací. Tyto oscilace jsou z hlediska regulace nežádoucí, ale mohou být i užitečné – např. při experimentálním vybuzení regulační smyčky s cílem zjistit kritický bod frekvenční charakteristiky pro automatické nastavování parametrů regulátoru podle frekvenční metody Ziegler-Nichols.

V dalším odstavci budeme hledat odpovědi na otázky:

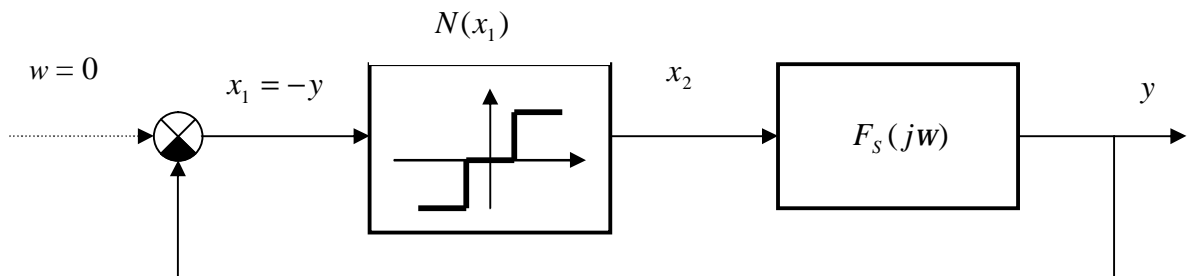
Za jakých podmínek mohou oscilace vzniknout? Jakou mají amplitudu a frekvenci?

Jak souvisí s modelem lineární části systému a s typem statické nelinearity?

Jednou z metod analýzy vzniku oscilací je *metoda harmonické linearizace (metoda ekvivalentních přenosů)*.

11.2. Metoda harmonické linearizace

Uvažujme zjednodušený regulační obvod, analogicky k (11.5), se statickou nelinearitou $N(\cdot)$ na vstupu lineárního systému, popsaného frekvenčním přenosem $F_S(j\omega)$:



Pro analýzu uzavřeného obvodu vyjdeme z předpokladů:

1/ V obvodu vznikly ustálené kmity (autooscilace) se základní frekvencí ω_0

2/ Lineární systém má charakter dolnofrekvenční propusti, $|F_S(j\omega_0)| \gg |F_S(jk\omega_0)|$ pro $k \geq 2$

3/ Nelinearita je symetrická vůči nulovému bodu

Za těchto předpokladů je na výstupu nelinearity **periodický signál** se základní frekvencí ω_0 a můžeme jej rozložit ve Fourierovu řadu.

Předpoklad 2/ znamená, že vyšší harmonické budou lineárním systémem potlačeny a na výstupu nelinearity má smysl uvažovat pouze první harmonickou periodického signálu s frekvencí ω_0 .

Předpoklad 3/ znamená, že ve Fourierově řadě bude stejnosměrná složka nulová.

*Protože chceme nahradit statickou nelinearitu v regulační smyčce tzv. **ekvivalentním přenosem**, budeme tento přenos definovat analogicky jako u frekvenčních přenosů lineárních dynamických systémů.*

Na vstupu statické nelinearity budeme předpokládat harmonický signál a na výstupu nelinearity první harmonickou periodického signálu.

Ekvivalentní přenos statické nelinearity definujeme poměrem výstupního a vstupního signálu nelinearity, respektive poměrem jejich Fourierových obrazů.

Analýza vzniku oscilací v lineárním obvodu se statickou nelinearitou může být vyšetřována frekvenčními metodami analýzy stability lineárních systémů.

Matematické vyjádření:

Na vstupu nelinearity uvažujeme harmonický signál

$$x_1(t) = A \sin w_0 t \quad (11.6)$$

Na výstupu nelinearity je periodický signál, který lze rozvést ve Fourierovu řadu

$$x_2(t) = N(A \sin w_0 t) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(A, w) \sin k w_0 t + b_k(A, w) \cos k w_0 t, \quad (11.7)$$

přičemž b_0 je stejnosměrná složka, $a_k(A, w), b_k(A, w)$ jsou koeficienty Fourierova rozvoje, závisléjící obecně na amplitudě a frekvenci periodického signálu.

Vzhledem k předpokladu 1/ se v celém obvodu uplatní pouze jeho první harmonická $x_2(t)$

$$x_2(t) = a_1(A, w_0) \sin w_0 t + b_1(A, w_0) \cos w_0 t \quad (\text{dle 2/ je } b_0 = 0) \quad (11.8)$$

Koeficienty Fourierova rozvoje $a_1(A, w_0), b_1(A, w_0)$ lze určit ze vztahů :

$$a_1(A, w_0) = \frac{1}{p} \int_0^{2p} N(A \sin w_0 t) \sin w_0 t \cdot d(w_0 t) \quad b_1(A, w_0) = \frac{1}{p} \int_0^{2p} N(A \sin w_0 t) \cos w_0 t \cdot d(w_0 t) \quad (11.9)$$

Poznamenejme, že pro lichou funkci statické nelinearity je koeficient $b_1(\cdot) = 0$ a pokud nemá nelinearita hysterezi, nezávisí koeficienty rozvoje $a_1(A, w), b_1(A, w)$ na frekvenci w .

Ekvivalentní přenos statické nelinearity $F_N(A, w)$ definujeme, analogicky jako frekvenční přenos u LDS, poměrem Fourierových obrazů výstupní a vstupní veličiny.

Protože pro každé w je přenos obecně komplexním číslem, dostaneme pro předpokládané $w = w_0$

$$F_N(A, w_0) = \frac{X_2(A, w_0)}{X_1(A, w_0)} = \frac{F\{a_1(A, w_0) \sin w_0 t + b_1(A, w_0) \cos w_0 t\}}{F\{A \sin w_0 t\}} = \frac{a_1(A, w_0) + j b_1(A, w_0)}{A} \quad (11.10)$$

Předpoklad, že v uzavřeném obvodu již vznikly oscilace s frekvencí w_0 a amplitudou A nyní opustíme, neboť v obecném případě musíme zjistit, zda vůbec oscilace mohou vzniknout a v případě jejich vzniku musíme jejich frekvenci a amplitudu určit.

Protože ekvivalentní přenos $F_N(A, w)$ zastupuje v uzavřeném obvodu statickou nelinearitu, můžeme postupovat stejným způsobem jako při frekvenční analýze stability LDS (viz Nyquist):

Vznik oscilací je vázán podmínkou existence reálného řešení rovnice

$$F_S(jw)F_N(A, w) = -1 \quad \text{resp.} \quad |F_S(jw)F_N(A, w)| = 1 \wedge \arg \{F_S(jw)F_N(A, w)\} = -p \quad (11.11)$$

a z těchto rovnic také určíme hledanou amplitudu A a frekvenci autooscilací w .

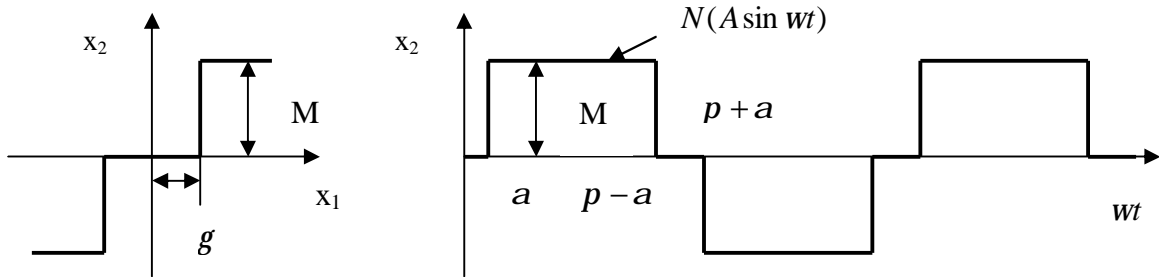
Příklad 11.1:

Určete ekvivalentní přenos statické nelinearity „relé s necitlivostí“, použité v předchozím schéma uzavřeného obvodu. Necitlivost vymežeme hodnotami $-g, +g$, maximální hodnotu na výstupu nelinearity omežeme na $-M, +M$.

Řešení:

Nelineární funkce je lichá funkce, symetrická vůči nulovému bodu a nemá hysterezi → koeficienty $b_0, b_1(A, \omega)$ budou nulové a stačí určit pouze koeficient $a_1(A, \omega)$, který nebude záviset na frekvenci $a_1(A, \omega) = a_1(A)$.

Přivedeme-li na vstup nelinearity harmonický signál $x_1(t) = A \sin \omega t$, objeví se na výstupu nelinearity periodická funkce $x_2(t) = N(A \sin \omega t)$, kde $a = \arcsin g$ (viz obr.):



$$a_1(A) = \frac{1}{p} \int_0^{2p} N(A \sin \omega t) \sin \omega t \cdot d(\omega t) = \dots = \frac{4M}{p} \cos a ; \quad F_N(A) = \frac{a_1(A) + 0}{A} = \frac{4M}{pA} \cos a$$

Pro ideální relé bez necitlivosti je $a = 0 \Rightarrow F_N(A) = \frac{a_1(A) + 0}{A} = \frac{4M}{pA}$

Poznámka:

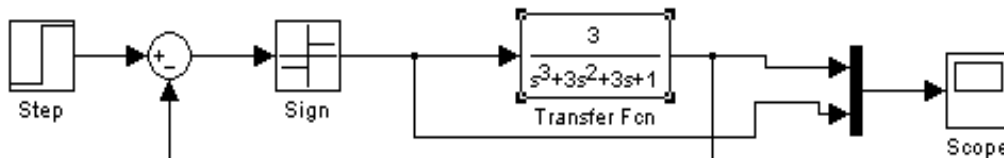
Ekvivalentní přenosy běžně používaných statických nelinearit jsou tabelovány.

V anglosaské literatuře „ekvivalentnímu přenosu“ odpovídá termín „describing function“.

Příklad 11.2:

Analyzujte možnost vzniku oscilací v uzavřeném regulačním obvodu, kde systém s přenosem $F_S(p) = \frac{3}{(p+1)^3}$ je

řízen ideálním dvoupolohovým relé, $u(t) = \text{sgn}[w(t) - y(t)] = \pm 1$.



Řešení:

Existuje-li reálné řešení, amplitudu A a frekvenci oscilací ω určíme řešením rovnic (analogie výpočtu ω_{krit}, K_{krit}):

$$|F_S(j\omega)F_N(A)| = 1 \wedge \arg \{F_S(j\omega)F_N(A)\} = -p, \text{ kde } F_N(A) = \frac{4M}{pA}, M = 1.$$

Frekvenci oscilací určíme z argumentové podmínky $\text{Im}\{F_S(j\omega)F_N(A)\} = 0$.

Výpočtem zjišťujeme frekvenci autooscilací $\omega = \sqrt{3}$ rad/sec.

Po dosazení $\omega = \sqrt{3}$ do amplitudové podmínky $|F_S(j\omega)F_N(A)| = 1$

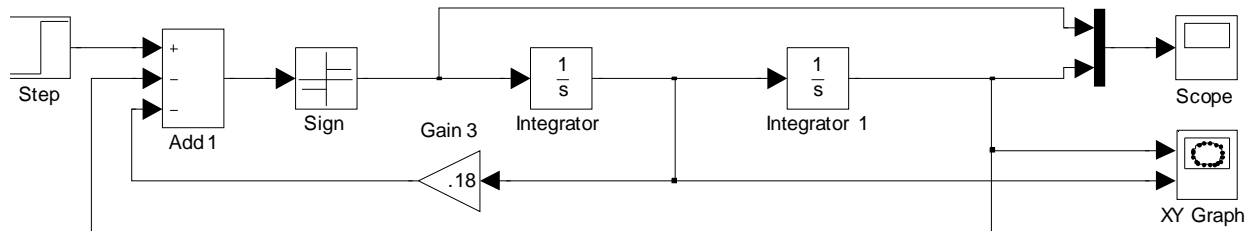
dostáváme amplitudu autooscilací

$$\frac{3}{(\sqrt{1+\omega^2})^3} \frac{4}{pA} = 1 \rightarrow \underline{A = 0.47}$$

11.3. Reléové regulační obvody

V odst. 11.1. jsme uvedli, že v reléových regulačních obvodech je regulátorem nelineární prvek typu relé (ideální dvoupolohové relé, relé s necitlivostí, s hysterezí aj.) a že se při regulaci objevují sklony k nestabilitě, spojené se vznikem mezních cyklů – autooscilací (viz *Příklad 11.2.*) Autooscilace jsou v regulačním obvodu obvykle nežádoucím jevem. V dalším ukážeme, jak lze autooscilace odstranit zavedením *derivační zpětné vazby*.

Problém budeme analyzovat na jednoduchém příkladu nelineárního regulačního obvodu s ideálním dvoupolohovým relé, které generuje řízení $u(t) = \text{sgn}[w(t) - y(t)] = \pm 1$ dle znaménka regulační odchylky $e(t) = w(t) - y(t)$. Řízeným systémem je dvojnásobný integrátor, referenčním signálem $w(t)$ je jednotkový skok. *Ve schéma prozatím neuvažujeme derivační zpětnou vazbu $-0.18\dot{x}(t)$:*



Řízený systém je popsán diferenciální rovnicí $\dot{x}(t) = u(t)$. Stavový model je popsán stavovými rovnicemi $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$ a výstupní rovnicí $y(t) = x_1(t)$.

Vyloučením času ze stavových rovnic dostaneme trajektorie ve stavové rovině $x_1 - x_2$, závislé na počátečních podmínkách $x_1(0)$, $x_2(0)$ a aplikovaném řízení $u(t) = \pm 1$:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{u}{x_2} \Rightarrow x_2 dx_2 = u dx_1 \quad (11.12)$$

Integrací levé a pravé strany dostáváme s ohledem na $u = +1$ a $u = -1$ dvě soustavy trajektorií - parabol, parametrizovaných počátečními podmínkami

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^2(0)}{2} = u[x_1 - x_1(0)] \quad (11.13)$$

Znaménkem řízení je definován směr trajektorie (pro $u = +1$ se x_2 zvětšuje a naopak).

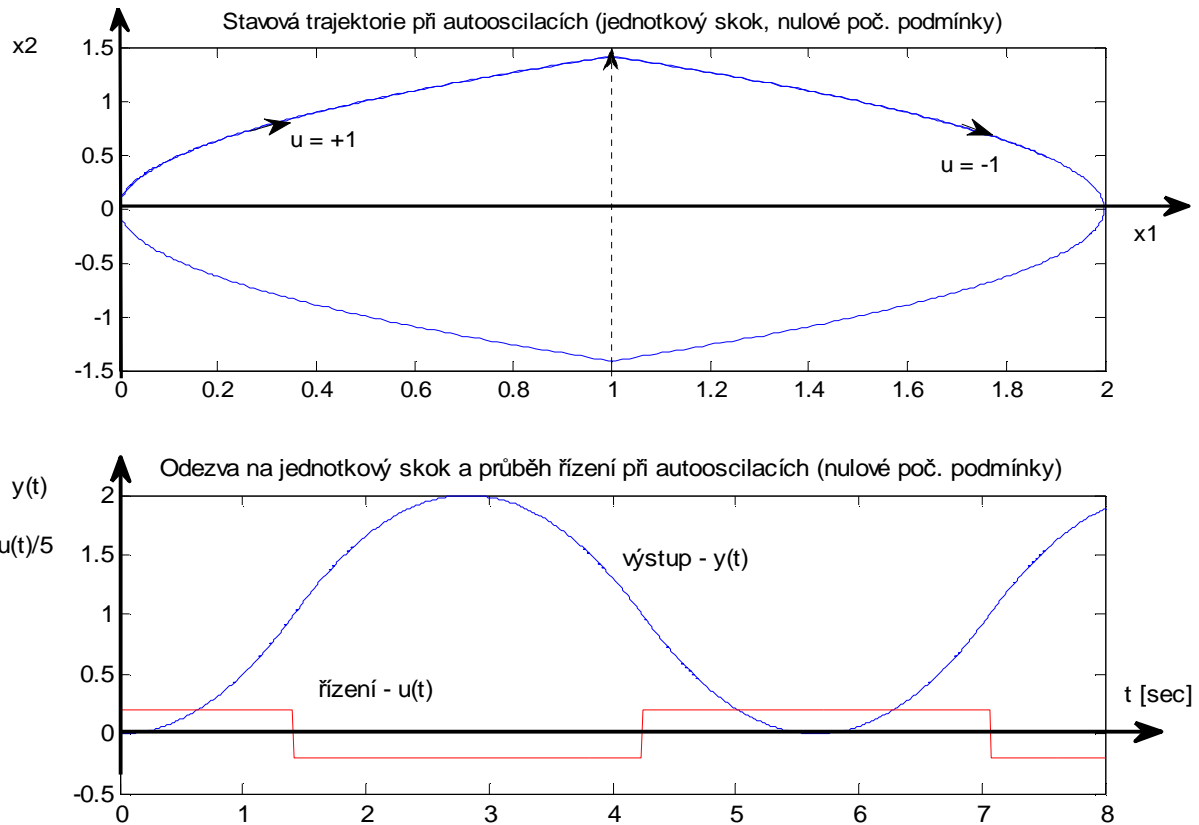
Uvažujme nyní reléové řízení systému v uzavřeném regulačním obvodu se systémem v nulových počátečních podmínkách (stále ještě neuvažujeme derivační zpětnou vazbu ve schéma).

Při $w(t) = 1$ je řízení $u(t)$ definováno vztahem $u(t) = \text{sign} e(t) = \text{sign}[1 - x_1(t)]$:

Pro $x_1(t) < 1$ je generováno řízení $+1$, trajektorie vychází z nulových počátečních podmínek a sleduje rostoucí parabolou. Při $x_1(t_1) = 1$ dochází k přepnutí, $x_2(t_1) = \sqrt{2}$.

Pro $x_1(t) > 1$ je generováno řízení -1 , trajektorie pokračuje z $x_2(t_1) = \sqrt{2}$ po klesající parabole a k dalšímu přepnutí dochází opět při $x_1(t_2) = 1$, $t_2 > t_1$.

Celý proces se opakuje, přímka $x_1 = 1$ má funkci „přepínací přímky“ (rovnoběžná s osou x_2) a ve stavové rovině vzniká uzavřená křivka – vynucený stabilní cyklus, který se ve skokové odezvě projevuje nežádoucím netlumeným kmitáním:



Zavedeme-li do regulačního obvodu navíc zápornou zpětnou vazbu od derivace výstupní veličiny, dostáváme pro regulační odchylku

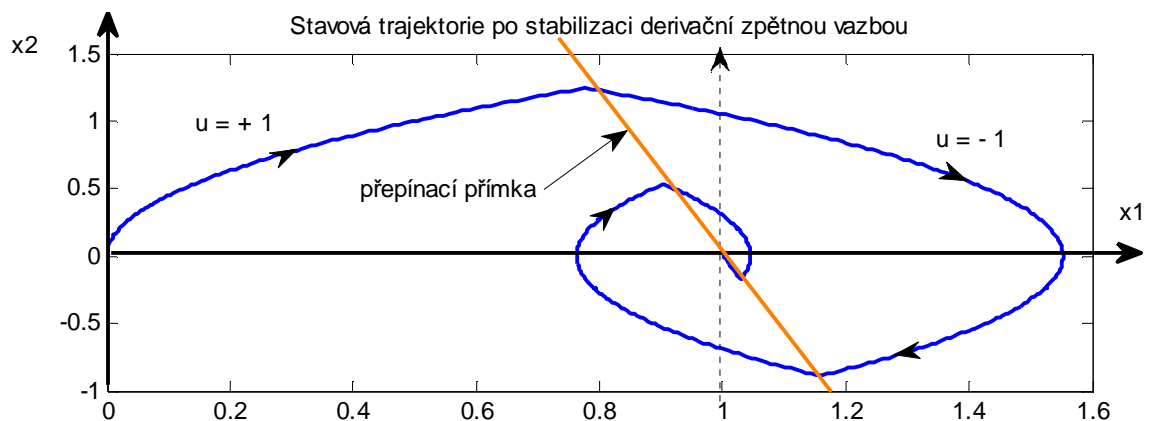
$$e(t) = [1 - x_1(t) - k\dot{y}(t)] = [1 - x_1(t) - kx_2(t)] \quad (11.14)$$

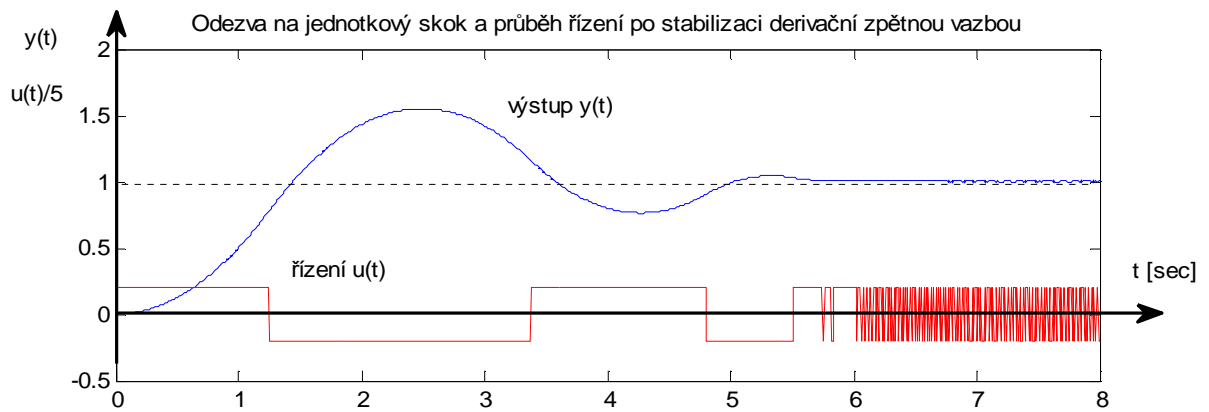
a pro řízení

$$u(t) = \text{sign } e(t) = \text{sign}[1 - x_1(t) - kx_2(t)] \quad (11.15)$$

Záporná derivační zpětná vazba způsobí, že k přepínání nyní dochází na přímce se záporným sklonem $-1/k$, k přepnutím na druhou soustavu trajektorií dochází s předstihem, zpětná vazba má stabilizující účinek a skoková odezva má již tlumený charakter. V našem příkladu jsme zavedli zápornou derivační zpětnou vazbu s $k = 0.18$ (viz schéma).

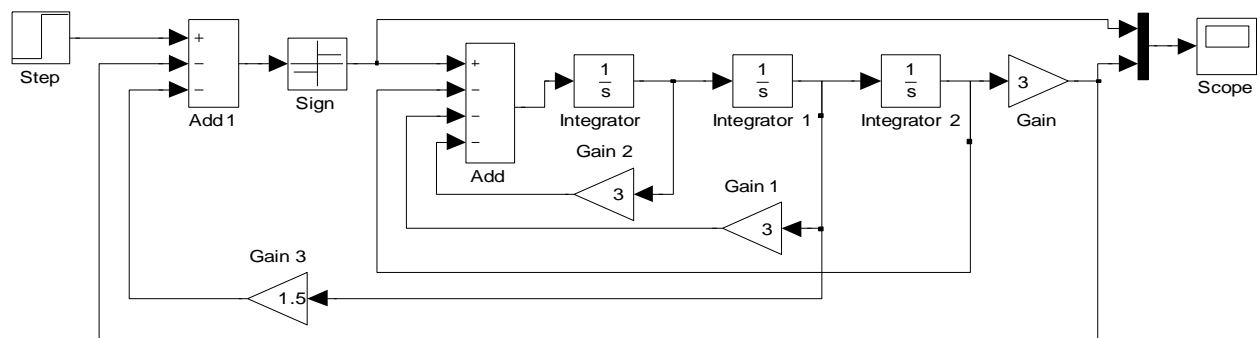
Chování trajektorií ve stavové rovině a skoková odezva jsou na následujících grafech:



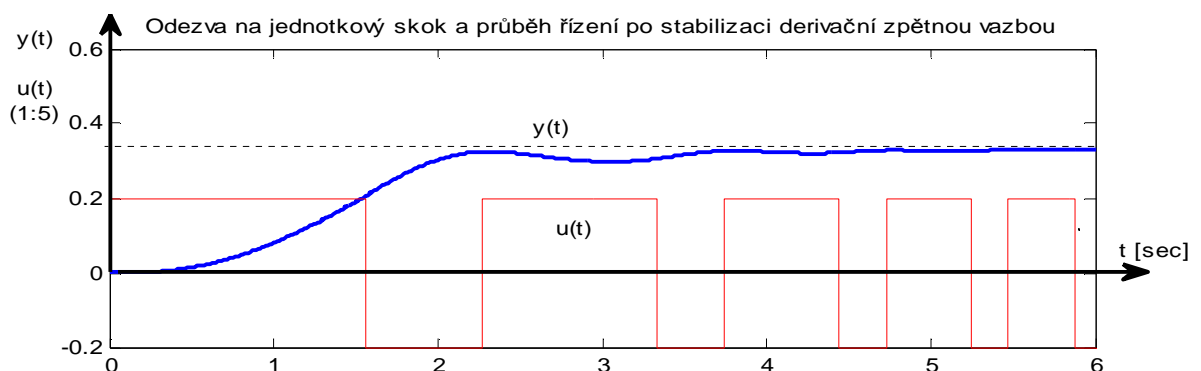


Z uvedeného také vyplývá, že v případě použití relé s necitlivostí nebo s hysterezí by docházelo k „pozdějšímu“ přepínání, nežli u ideálního dvoupolohového relé. Bez stabilizující derivační zpětné vazby by systém vykazoval výraznější tendenci k nestabilitě.

Na následujícím simulačním schéma je ještě ilustrován vliv zavedení stabilizující zpětné vazby od derivace výstupu při reléovém řízení stabilního systému z *Příkladu 11.2*, kde jsme vyšetřovali amplitudu a frekvenci autooscilací regulačního obvodu:



Navržená derivační zpětná vazba vede na řízení $u(t) = \text{sign } e(t) = \text{sign}[1 - x_1(t) - 1.5x_2(t)]$, které opět stabilizuje skokovou odezvu regulačního obvodu:



Poznámka: Všimněme si, že u systémů s přepínací přímkou nastává ke konci regulačního pochodu ke zrychlené frekvenci přepínání relé, při kterém se trajektorie blíží k ustálené hodnotě „*podél*“ přepínací přímky.

Trajektorii, která by po dosažení přepínací přímky nadále již pouze sledovala přepínací přímku do ustáleného stavu, lze generovat tzv. *regulátorem s klouzavým režimem* (sliding mode control). Jedná se o regulátor s přepínanou strukturou a řízení sestává ze dvou částí, které po řadě mají za cíl „dosažení“ přepínací křivky a „sledování“ přepínací přímky.

11.4. Ljapunovova teorie stability

Uvažujme autonomní (neřízený) nelineární t-variantní dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = f[x(t), t]; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad t \in R_+ \quad (11.16)$$

a předpokládejme, že $f[x(t), t]$ je nelineární funkce vyhovující standardním podmínkám pro existenci a jednoznačnost řešení a rovnovážný stav x_r vyhovuje rovnici $0 = f[x_r(t), t]$, $\forall t, t \geq t_0$.

Ljapunovova teorie stability se zabývá vyšetřováním stability rovnovážného stavu neřízeného systému (11.16). Pokud má systém více rovnovážných stavů, vyšetřuje se jejich stabilita odděleně. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $x_r = 0$ (při $x_r \neq 0$ využijeme translaci do nuly).

Definice 11.1. : (Stabilita rovnovážného stavu ve smyslu Ljapunova)

Rovnovážný stav $x_r = 0$ neřízeného systému (11.16) je stabilní ve smyslu Ljapunova, jestliže $\forall \epsilon > 0$ a $\forall t_0 \exists d(\epsilon)$ takové, že $\|x_0 - x_r\| \leq d \Rightarrow \|x(t; x_0, t_0) - x_r\| \leq \epsilon; \forall t, t > t_0; \epsilon, d \dots$ reálná čísla.

Definice 11.2. : (Lokální asymptotická stabilita rovnovážného stavu ve smyslu Ljapunova)

Rovnovážný stav $x_r = 0$ neřízeného systému (11.16) je lokálně asymptoticky stabilní ve smyslu Ljapunova, jestliže platí *Definice 11.1.* a každá trajektorie z bodu x_0 , dostatečně blízkého k x_r , konverguje pro $t \rightarrow \infty$ k rovnovážnému bodu x_r , tedy $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0, t_0) - x_r\| = 0$.

Definice 11.3. : (Globální asymptotická stabilita rovnovážného stavu ve smyslu Ljapunova)

Rovnovážný stav $x_r = 0$ neřízeného systému (11.16) je globálně asymptoticky stabilní ve smyslu Ljapunova, jestliže *Definice 11.2.* platí $\forall x_0, t_0$.

A.M. Ljapunov navrhl metodu pro vyšetřování stability rovnovážného stavu x_r autonomního (neřízeného) nelineárního dynamického systému, která obchází nutnost znalosti řešení nelineárních rovnic popisujících chování systému a o stabilitě rozhoduje podle chování vhodně zvolené skalární funkce (Ljapunovovy funkce) podél trajektorie systému.

Metodu můžeme považovat za zobecnění představy, že systém, který se nachází v nějakém počátečním stavu, má určitou vnitřní energii a její časová změna při pohybu systému z počátečního stavu rozhoduje o stabilitě či nestabilitě vyšetřovaného rovnovážného stavu. Rovnovážný stav bude zřejmě stabilní, pokud energie systému bude s rostoucím časem klesat nebo alespoň zůstane na nějaké konstantní hodnotě.

Za Ljapunovovu „energetickou“ funkci lze považovat v podstatě libovolnou nezápornou skalární funkci $V(x, t)$. V dalším ukážeme, že chování $V(x, t)$ resp. její časové derivace $\dot{V}(x, t)$

$$\dot{V}(x, t) \Big|_{\dot{x}=f(x,t)} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right)^T \dot{x}(t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right)^T f[x(t), t] \quad (11.17)$$

podél trajektorií systému v nějaké oblasti $D \subseteq R^n$, obsahující $x_r = 0$, rozhoduje o stabilitě rovnovážného stavu.

Při určení $\dot{V}(x, t) \Big|_{\dot{x}=f(x,t)}$ se dosazuje pravá strana nelineární diferenciální rovnice (11.16) a jedná se o tak zvanou přímou Ljapunovovu metodu. Nabízí se také možnost provést nejprve linearizaci nelineárního systému v okolí rovnovážného stavu a dosadit z rovnic linearizovaného modelu nelineárního systému. V tomto případě by jednalo o nepřímou Ljapunovovu metodu, která ovšem může rozhodnout pouze o málo cenné lokální stabilitě.

Uveďme ještě dvě definice:

Definice 11.4.: (Lokální pozitivně definitní funkce $V(x,t)$)

Spojité funkce $V: R^n \times R_+ \rightarrow R$ je lokální pozitivně definitní funkcí, jestliže pro nějaké $d > 0$ a nějakou spojitou striktně rostoucí funkci $a: R_+ \rightarrow R$ platí

$$V(0, t_0) = 0 \quad a \quad V(x, t) \geq a(\|x\|), \quad \forall x \in D, \quad D = \{x \in R^n : \|x\| \leq d\}, \quad \forall t \geq t_0$$

Definice 11.5.: (Pozitivně definitní funkce $V(x,t)$)

Platí Definice 11.1. a navíc $a(\|x\|) \rightarrow \infty$ při $\|x\| \rightarrow \infty$

Ljapunovův teorém o stabilitě (t-variantní nelineární dynamický systém)

Jestliže existuje nějaká oblast D v okolí rovnovážného stavu $x_r = 0$ a spojitě diferencovatelná pozitivně definitní funkce $V: D \times R_+ \rightarrow R$, jejíž časová derivace \dot{V} podél trajektorií systému je negativně semidefinitní, potom rovnovážný stav $x_r = 0$ systému (11.16) je stabilní ve smyslu Ljapunova.

Ljapunovův teorém o asymptotické stabilitě (t-variantní nelineární dynamický systém)

Jestliže existuje nějaká oblast D v okolí rovnovážného stavu $x_r = 0$ a nějaká pozitivně definitní funkce $W: D \rightarrow R$ omezující shora spojitě diferencovatelnou pozitivně definitní funkcí $V: D \times R_+ \rightarrow R$, jejíž časová derivace \dot{V} podél trajektorií systému je negativně definitní, potom rovnovážný stav $x_r = 0$ systému (11.16) je asymptoticky stabilní ve smyslu Ljapunova.

Jestliže $D \equiv R^n$, jedná se o globální asymptotickou stabilitu.

Ljapunovova metoda dává jen postačující podmínky stability. To znamená, že rovnovážný stav může být stabilní, ale nenalezneme vhodnou Ljapunovovu funkci $V(x,t)$ pomocí které bychom to dokázali.

Ljapunovův teorém o stabilitě pro t-invariantní nelineární dynamický systém

Uvažujme autonomní (neřízený) nelineární t-invariantní dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = f[x(t)]; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad x_r = 0 \quad (11.18)$$

Jestliže existuje oblast $D \subseteq R^n$ v okolí rovnovážného stavu $x_r = 0$, kde nějaká spojitě diferencovatelná pozitivně definitní skalární funkce vektorového argumentu $V(x)$ vyhovuje podmínkám:

$$1/ \quad V(x) > 0, \quad \forall x, x \neq 0 \quad a \quad V(0) = 0, \quad (11.19)$$

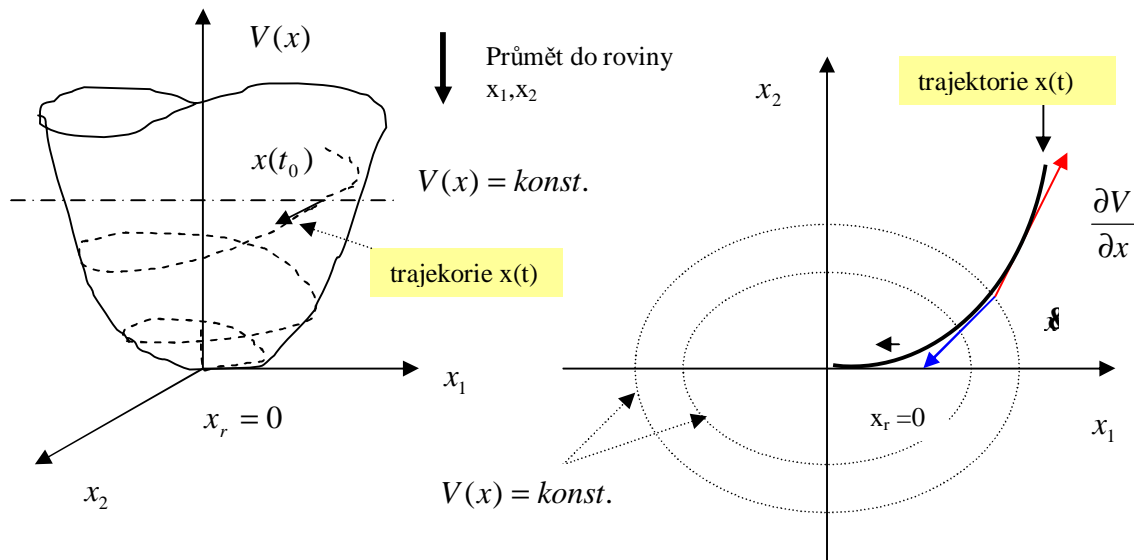
$$2/ \quad \dot{V}(x)|_{\dot{x}=f(x)} = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T \cdot \dot{x} = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T f(x) \leq 0 \quad (\text{negativně semidefinitní}), \quad (11.20)$$

potom rovnovážný stav $x_r = 0$ systému (11.14) je stabilní v oblasti $D \subseteq R^n$.

Je-li časová derivace Ljapunovovy funkce negativně definitní $\dot{V}(x)|_{\dot{x}=f(x)} < 0$, potom rovnovážný stav $x_r = 0$ systému (11.18) je asymptoticky stabilní v oblasti $D \subseteq R^n$.

Kromě energetické interpretace Ljapunovovy stability dává dobrou představu i geometrická interpretace (viz následující obr.). Rovnovážný stav bude asymptoticky stabilní, jestliže vzdálenost zastupujícího bodu trajektorie od rovnovážného stavu (vzdálenost je dána „polohou“ zastupujícího bodu na $V(x)$) se bude s rostoucím časem zmenšovat. To může nastat tehdy, když trajektorie systému $x(t)$ bude protínat křivky $V(x) = konst.$ „zvenku dovnitř“.

Jinak řečeno: úhel, který svírá v daném bodě vektor $\text{grad}V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}$ s tečnou \mathfrak{f} musí být tupý, což odpovídá požadavku na záporné znaménko skalárního součinu $V^{\mathfrak{f}}(x)|_{\mathfrak{f}=f(x)} = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \mathfrak{f} < 0$.



Problémem zůstává, jak volit Ljapunovovu funkci. Existuje řada metod pro generování Ljapunovových funkcí, ale tato problematika přesahuje rámec přednášené látky. Poznamenejme pouze, že pokud lze určit úplnou energii systému, lze ji použít jako Ljapunovovu funkci.

Příklad 11.3:

Analyzujte stabilitu rovnovážného stavu nelineárního tlumiče s jednotkovou hmotností, popsaného nelineární diferenciální rovnicí $\mathfrak{f}(t) + y[\mathfrak{f}(t)] + j[y(t)] = 0$ za předpokladů: $j(0) = y(0) = 0$, $j(y)y > 0$ (nelinearita prochází 1. a 3. kvadrantem).

Řešení:

$$y(t) = x_1(t) \Rightarrow \mathfrak{f}(t) = \mathfrak{f}_1(t) = x_2(t), \quad \dots \dots \text{rovnovážný stav je } x_{1r} = x_{2r} = 0$$

$$\mathfrak{f}_2(t) = \mathfrak{f}_2(t) = -j(x_1) - y(x_2)$$

Protože $y(t)$ označuje polohu a $\mathfrak{f}(t)$ rychlost, budeme za Ljapunovovu funkci považovat součet kinetické a potenciální energie

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} j(s) ds, \quad \text{neboť vyhovuje Ljapunovovu teorému: } V(x) > 0, \forall x, x \neq 0, \quad V(0) = 0.$$

Určíme časovou derivaci $V^{\mathfrak{f}}(x)|_{\mathfrak{f}=f(x)}$

$$V^{\mathfrak{f}}(x)|_{\mathfrak{f}=f(x)} = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \mathfrak{f} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \mathfrak{f}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \mathfrak{f}_2 = j(x_1)x_2 - x_2 j(x_1) - x_2 y(x_2)$$

Tato funkce bude negativně semidefinitní, bude-li $x_2 y(x_2) \geq 0$ (nelineární funkce tlumení $y(x_2)$ prochází 1. a 3. kvadrantem) a rovnovážný stav systému $x_{1r} = x_{2r} = 0$ bude stabilní.

Poznámka: Ve skutečnosti bude rovnovážný stav dokonce asymptoticky stabilní, protože za určitých podmínek postačuje pro asymptotickou stabilitu i negativní semidefinitnost časové derivace Ljapunovovy funkce (Lasallův princip – nebudeme se jím zabývat).

Příklad 11.4:

Analyzujte stabilitu rovnovážného stavu netlumeného kyvadla s jednotkovou hmotností, popsaného nelineární diferenciální rovnicí $\ddot{y}(t) + a \sin y(t) = 0$, $a > 0$!

Řešení:

$$y(t) = x_1(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dots \dots \dots \text{rovnovážný stav je } x_{1r} = x_{2r} = 0$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}_1(t) = -a \sin x_1(t)$$

Za Ljapunovovu funkci zvolíme opět součet kinetické a potenciální energie:

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + a \int_0^{x_1} \sin s \, ds = \frac{x_2^2}{2} + a(1 - \cos x_1), \quad V(0) = 0 \text{ a } V(x) > 0 \text{ pro } 0 < |x_1| \leq \frac{\pi}{2}$$

Určíme časovou derivaci $\dot{V}(x)|_{\dot{x}=f(x)}$

$$\dot{V}(x)|_{\dot{x}=f(x)} = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 = 0$$

Protože v dané oblasti je $V(x) > 0$ a $\dot{V} = 0$, je rovnovážný stav systému $x_{1r} = x_{2r} = 0$ stabilní.

11.5. Analýza stability LDS – Ljapunovovy rovnice

Ljapunovy teoremy stability lze přirozeně aplikovat i na autonomní (neřízené) lineární dynamické systémy (s jediným rovnovážným stavem $x_r = 0$).

Připomeňme, že stabilita, asymptotická stabilita či nestabilita LDS je *globální* - platí $\forall x(t_0)$.

Pro spojité i diskrétní LDS lze Ljapunovovu funkci $V(x)$ volit jako kvadratickou formu se symetrickou pozitivně definitní maticí P .

Ljapunovova rovnice pro spojité LDS

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t); \quad x(t_0), \quad x \in R^n \tag{11.21}$$

s rovnovážným stavem $x_r = 0$ má Ljapunovova funkce tvar

$$V(x) = x^T(t)Px(t); \quad P = P^T, \quad P > 0 \Rightarrow V(x) > 0 \quad \forall x, x \neq 0, \quad V(0) = 0 \tag{11.22}$$

Pro časovou derivaci Ljapunovovy funkce podél trajektorií systému (11.17) dostaneme kvadratickou formu

$$\dot{V}(x)|_{\dot{x}=Ax} = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) = x^T(t)A^T Px(t) + x^T(t)PAx(t) = x^T(t)[A^T P + PA]x(t) \tag{11.23}$$

Pro stabilitu rovnovážného stavu $x_r = 0$ požadujeme

$$\dot{V}(x)|_{\dot{x}=f(x)} \leq 0 \Rightarrow x^T(t)[A^T P + PA]x(t) = -x^T Q x(t), \text{ kde } Q \text{ je } \underline{\text{pozitivně semidefinitní}} \text{ matice}$$

a pro asymptotickou stabilitu rovnovážného stavu $x_r = 0$

$$\dot{V}(x)|_{\dot{x}=f(x)} < 0 \Rightarrow x^T(t)[A^T P + PA]x(t) = -x^T Q x(t), \text{ kde } Q \text{ je } \underline{\text{pozitivně definitní}} \text{ matice}$$

Protože uvedené vztahy musí platit $\forall x(t)$, můžeme učinit závěr:

*Globální asymptotická stabilita rovnovážného stavu **spojitého** LDS je zaručena, jestliže existují pozitivně definitní matice P a Q vyhovující **Ljapunovově rovnici***

$$A^T P + PA + Q = 0 \tag{11.24}$$

Ljapunovova rovnice pro diskrétní LDS

$$S: x(k+1) = Ax(k); x(0), x \in R^n, k = 0, 1, \dots \quad (11.25)$$

s rovnovážným stavem $x_r = 0$ má Ljapunovova funkce tvar

$$V(x) = x^T(k)Px(k), P = P^T, P > 0 \quad (11.26)$$

a její časová diference podél trajektorií systému je opět kvadratickou formou

$$\Delta V(x) = V[x(k+1)] - V[x(k)] = x^T(k)[A^T P A - P]x(k) = -x^T(k)Qx(k) \quad (11.27)$$

Protože uvedené vztahy musí platit $\forall x(k)$, můžeme učinit analogický závěr jako u spojité verze:

Globální asymptotická stabilita rovnovážného stavu diskrétního LDS je zaručena, jestliže existují pozitivně definitní matice P a Q vyhovující Ljapunovově rovnici

$$A^T P A - P + Q = 0 \quad (11.28)$$

Pro nelineární systémy sestávající z lineárního systému se statickou nelinearitou na vstupu

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bN(y) \quad (11.29)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

se doporučuje volba Ljapunovovy funkce ve tvaru kvadratická forma + integrál z nelinearity:

$$V(x) = x^T P x + \int N(y) dy \quad (11.30)$$

Jestliže je lineární systém stabilní a statická nelinearita vyhovuje "sektorové" podmínce

$$N(0) = 0 \text{ a } 0 \leq \frac{N(y)}{y} \leq k, k \neq \infty \quad (11.31)$$

lze pro analýzu stability použít **frekvenční kritérium stability**, které odvodil Popov.

Popovovo frekvenční kritérium stability:

Uzavřený nelineární systém, sestávající z lineárního systému se vstupní statickou nelinearitou vyhovující „sektorové“ podmínce, je globálně asymptoticky stabilní, jestliže existuje reálné číslo q takové, že $\forall w, w \geq 0$ platí

$$\operatorname{Re}\left\{(1 + jwq) F_s(jw)\right\} + \frac{1}{k} > 0 \quad (11.32)$$

Rozepsáním této podmínky dostáváme

$$\operatorname{Re}\left\{(1 + jwq)[\operatorname{Re} F_s(jw) + j \operatorname{Im} F_s(jw)]\right\} + \frac{1}{k} > 0 \rightarrow \underbrace{\operatorname{Re} F_s(jw)}_x - qw \underbrace{\operatorname{Im} F_s(jw)}_y + \frac{1}{k} > 0$$

a podmínku asymptotické stability lze přeformulovat:

Uzavřený nelineární systém, sestávající z lineárního systému se vstupní statickou nelinearitou vyhovující „sektorové“ podmínce, je globálně asymptoticky stabilní, jestliže se celá modifikovaná frekvenční charakteristika lineárního systému v souřadnicích $\operatorname{Re} F_s(jw), jw \operatorname{Im} F_s(jw)$ nachází "pod" přímkou

$$y = (1/q)x + 1/kq \quad (11.33)$$
