# Metody Počítačového Vidění (MPV) - 3D počítačové vidění

## Projektivní geometrie

Ing. Zdeněk Krňoul, Ph.D.

Katedra Kybernetiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

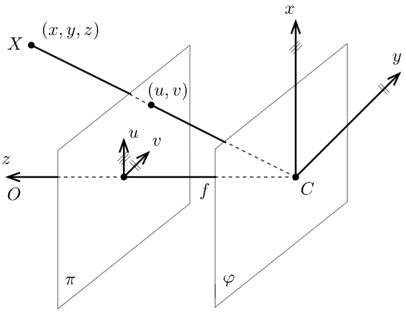
# Obsah přednášky

- **Projektivní geometrie**
  - projektivní prostor
  - projektivita
  - projektivní transformace
  - zajímavé vlastnosti projektivní geometrie

# Projektivní geometrie

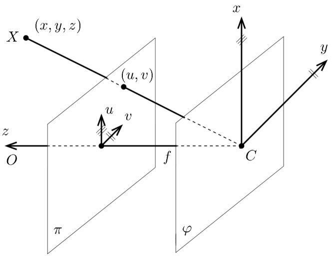
Úvod do projektivní geometrie, reprezentace a zápis

- bod ve 2D prostoru budeme značit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- bod ve 3D prostoru budeme značit $\mathbf{X}$
- přímka ve 2D prostoru $n$
- přímka ve 3D prostoru $O$
- rovina ve 3D prostoru $\phi$, $\varphi$




DEPARTMENT OF CYBERNETICS

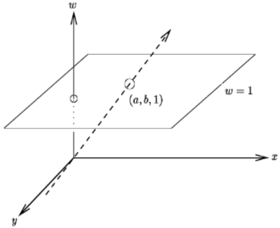
# Projektivní geometrie




Vektorové reprezentace pak budou následující:
bod v rovině $\mathbf{x} = [u, v]^T$, nebo $\mathbf{x} = [x, y]^T$,
bod v prostoru $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$ nebo $\mathbf{X} = [x, y, z]^T$,
přímka $\mathbf{n} = [a, b, c]^T$
Geometrické entity budeme uvažovat jako sloupcový vektor, násobení matice tímto sloupcovým vektorem zprava má výsledek opět sloupcový vektor.

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

# Homogenní reprezentace




- bod v rovině ($\mathbb{R}^2$) je reprezentovaný vektorem o velikosti 3 přidáním třetí souřadnice $w$ (**homogenní souřadnice**) a vzniká vektor v ($\mathbb{R}^3$)
- pro $w = 1$ $[a, b, 1]^T$ i všechny body $[x_1, x_2, x_3]^T$ vzniklé jako $k[a, b, 1]^T$ v $\mathbb{P}^2$ reprezentují stejný původní bod v nehomogenních souřadnicích v $\mathbb{R}^2$
- $[a, b]^T$ zpět získáme ho jako $[x_1/x_3, x_2/x_3]^T$.

*Pozn. pro vyšší dimenze platí také, např. pro $\mathbb{R}^3$ a w=1 $[x, y, z, 1]^T$*

# Projektivní prostor $\mathbb{P}^2$

- přímka v rovině je reprezentována obecnou rovnicí přímky: $ax + by + c = 0$
- změna parametrů $a$, $b$ a $c$ nám určuje odlišnou přímku ... přirozeně pak přímka může být vyjádřena vektorem $\mathbf{n} = [a, b, c]^T$
- dále víme, že bod v rovině $\mathbf{x} = [x, y]^T$ $(\mathbb{R}^2)$ leží na přímce $\mathbf{n} = [a, b, c]^T \Leftrightarrow ax + by + c = 0$
- podmínka lze zapsat jako skalární součin $[x, y, 1][a, b, c]^T = 0$
- pozorujeme, že pro $k$, kdy $[kx, ky, k]$ je zmíněná podmínka také splněna $\Leftrightarrow [x, y, 1][a, b, c]^T = 0$

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

# Projektivní prostor $\mathbb{P}^2$

- podobně vztah **přímka** $\leftrightarrow$ **vektor** ... rovnice přímky $ax + by + c = 0$ a $(ka)x + (kb)y + (kc) = 0$ jsou stejné $\rightarrow$ ale odlišný vektor
- tento vztah ekvivalence je známí jako **homogenní vektor**

## Definice

- všechny vektory lišící se pouze v měřítku představují jednu třídu prvků
- množina všech těchto tříd prvků v $\mathbb{R}^3 - [0, 0, 0]^T$ tvoří **projektivní prostor** $\mathbb{P}^2$
- vektor $[0, 0, 0]^T$ nekoresponduje žádné přímce a je z prostoru vyjmut

# Přímka a bod

- průsečík dvou přímek $\mathbf{n}$ a $\mathbf{n}'$ je dán vektorovým součinem: $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$
- bod $\mathbf{x} = [x_1, x_2, 0]^T$ patří do $\mathbb{P}^2$
- jeho nehomogenní souřadnice v $\mathbb{R}^2$ tedy $[x_1/0, x_2/0]^T \rightarrow$ bod, který v rovině má nekonečné souřadnice ... bodu říkáme *Ideal Point* - bod v nekonečnu
- takovýto bod je vlastně průsečíkem dvou rovnoběžných přímek
- všechny body v nekonečnu leží na jedné "přímce v nekonečnu"$[0, 0, 1]^T$

Podobné odvození nalezneme pro zápis průsečíků dvou přímek, nebo pro získání přímky spojením dvou bodů.

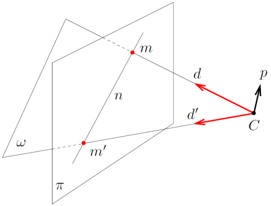
## Shrnutí

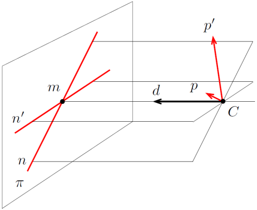
- bod $\mathbf{x}$ leží na přímce $\mathbf{l}$ pokud $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{l} = \mathbf{0}$
- průsečík $\mathbf{m}$ dvou přímek $\mathbf{n}$ a $\mathbf{n}'$ (i rovnoběžných) je dán vektorovým součinem: $\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}'$ (rovnoběžné přímky mají průsečík bod v nekonečnu)
- přímka $\mathbf{n}$ spojující dva body $m$ a $m'$ je analogicky: $n = m \times m'$

*Pozn.*
*Zavedení projektivního prostoru je určení nějakého popisu pro perspektivu*
*Geometrické objekty jako je bod, přímka a rovina jsou zapisovány vektorově*
*Potom vztahy mezi těmito objekty je možné zapisovat jednodušeji než kdyby se zapisovaly v nehomogenních souřadnicích*

# Model pro projektivní rovinu a princip duality

- body v $\mathbb{P}^2$ jsou paprsky v $\mathbb{R}^3$ … množina všech vektorů $\mathbf{x} = k[x_1, x_2, x_3]^T$ s měnícím se $k$ formuje paprsek, který směřuje ze středu promítání
- analogicky přímka v prostoru $\mathbb{P}^2$ odpovídá rovině v $\mathbb{R}^3$ procházející středem projekce
- obdobně dva odlišné paprsky určují zmíněnou rovinu stejně jako dva odlišné body určují $\mathbb{R}^2$ přímku
- obráceně … dvě přímky mají společný bod - průsečík a tedy dvě roviny mají společný průsečík … paprsek



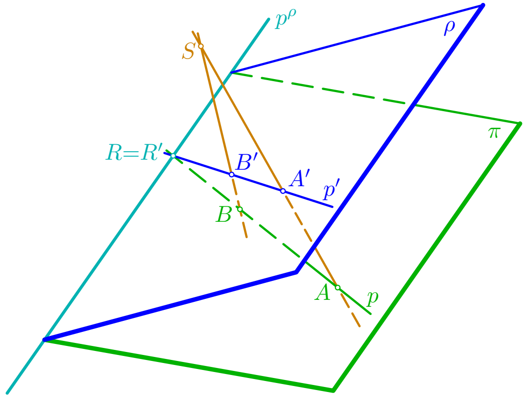



# Obsah přednášky

- Projektivní geometrie
  - projektivní prostor
  - **projektivita**
  - projektivní transformace
  - zajímavé vlastnosti projektivní geometrie

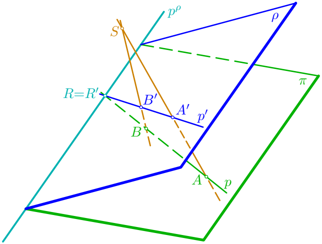
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

# Projektivita




*Poznámka: je projektivní zobrazení roviny do roviny*

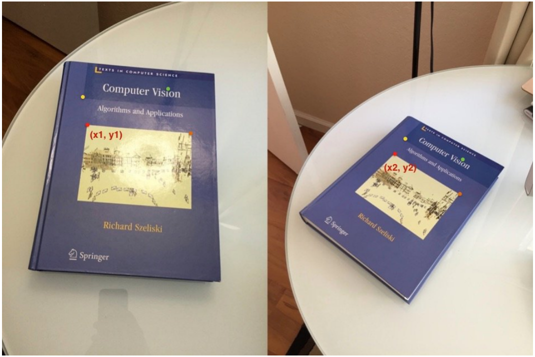
- body ležící na společné přímce jsou transformovány na přímku




## Definice

Projektivita je invertibilní mapování $h$ bodů v $\mathbb{P}^2$ (tedy homogenních $3 \times 1$ vektorů) do **samého** prostoru $\mathbb{P}^2$ $\Leftrightarrow$ tři body $x_1$, $x_2$ a $x_3$ ležící na společné přímce jsou mapovány na body $h(x_1)$, $h(x_2)$ a $\mathrm{h}(x_3)$, které leží také na **společné přímce**.

*Poznámka. Projektivita je také někdy nazývána kolineace, projektivní transformace, nebo homografie. Tyto označení jsou synonyma.*




## Důsledek

Mapování $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ je projektivita pouze a jen, existuje-li nesingulární matice $\mathbf{H}$, $3 \times 3$, $(det(\mathbf{H}) \neq 0)$, pro kterou platí, že nějaký bod v $\mathbb{P}^2$ reprezentovaný vektorem $\mathbf{x}$ lze transformovat jako $h(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x}$ (*projektivní transformace*).

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

# Zápis projektivní transformace

- projektivní transformace je dána jako:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

- je to lineární transformace homogenního vektoru nesingulární $3 \times 3$ maticí $\mathbf{H}$
- matice $\mathbf{H}$ má 8 stupňů volnosti $\rightarrow$ poměrům dvojic 9 prvků matice
- násobení matice konstantou $k$ nemění definovanou transformaci a konstanta představuje pouze měřítko
- $\mathbf{H}$ je jednoznačně určena čtveřicí sobě korespondujících bodů nebo přímek v obecné pozici

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

## Shrnutí

- kolineární body (body ležící na společné přímce) jsou opět transformovány na kolineární body
- několik různoběžných přímek se společným průsečíkem jsou transformovány opět na různoběžné přímky s jedním společným průsečíkem
- pořadí kolineárních bodů je zachováno (viz později)
- bod $\mathbf{x}$ je transformován na bod $\mathbf{x}'$ tak, že: $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$
- přímka $\mathbf{l}$ je transformován na přímku $\mathbf{l}'$ tak, že: $\mathbf{l}' = H^{-T}\mathbf{l}$

*Příkladem takového transformace pořízení stejné scény různým fotoaparátem, nebo přiblížení (ZOOM), nebo pootočení kamery (ve středu projekce, viz dále), nebo vše najednou.*

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

# Určení 2D projektivní transformace

- 2D homografie je dána množinou bodů $\mathbf{x}_i$ v prostoru $\mathbb{P}^2$ a množinou korespondujících bodů ve stejném $\mathbb{P}^2$
- nalezení takovéto transformace z $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ znamená určit matici $\mathbf{H}$ tak, že platí $\mathbf{H}\mathbf{x_i} = \mathbf{x'_i}$ pro každé $i$.
- minimální počet potřebných bodů $\leftrightarrow$ počtu stupňů volnosti hledané transformace ... obecná projektivní transformace ... $3 \times 3$ matice (9 prvků) ale 8 stupňů volnosti
- 1 bod má dva stupně volnosti, tedy souřadnice $(x, y) \rightarrow$ čtyři body a korespondenty

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

- $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{Hx}_i$ nejsou stejné vektory, ale mají stejný směr a liší se pouze velikostí, viz obrázek
- pro jeden bod (korespondující pár) vztah $\mathbf{Hx_i} = \mathbf{x_i'}$ určuje soustavu 3 lineárních rovnic (s pravou stranou) (řešení přes Cramerovo pravidlo)
- pak můžeme přepsat jako vektorový součin $\mathbf{x_i'} \times \mathbf{Hx_i} = \mathbf{0}$ a pak:

$$\mathbf{x_i'} \times \mathbf{Hx_i} = \begin{pmatrix} y_i'\mathbf{h}^{3T}\mathbf{x_i} - w_i'\mathbf{h}^{2T}\mathbf{x_i} \\ w_i'\mathbf{h}^{1T}\mathbf{x_i} - x_i'\mathbf{h}^{3T}\mathbf{x_i} \\ x_i'\mathbf{h}^{2T}\mathbf{x_i} - y_i'\mathbf{h}^{1T}\mathbf{x_i} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

- $\mathbf{h}^{1T}$ je vektor odpovídající prvnímu řádku matice $\mathbf{H}$
- transformovaný bod (tedy $\mathbf{x}_i'$) je v homogenních souřadnicích značen $\mathbf{x}_i' = (x_i', y_i', w_i')$

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic pak přepisem získáme jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i'\mathbf{x}_i^T & y_i'\mathbf{x}_i^T \\ w_i'\mathbf{x}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i'\mathbf{x}_i^T \\ -y_i'\mathbf{x}_i^T & x_i'\mathbf{x}_i^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3}$$

- pro bod $i$ označíme soustavu jako $\mathbf{A}_i\mathbf{h} = \mathbf{0}$, kde vektor $\mathbf{h}$ je sloupcový vektor $9 \times 1$ složený ze třech řádků matice $\mathbf{H}$
- ze 3 rovnic jsou jen dvě lineárně nezávislé; 3. rovnice je pře-násobený součet první a druhé rovnice $\Rightarrow$ 3. řádek lze vypustit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i'\mathbf{x}_i^T & y_i'\mathbf{x}_i^T \\ w_i'\mathbf{x}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i'\mathbf{x}_i^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4}$$

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

- třetí homogenní souřadnice promítnutého bodu ($w_i'$) může být zvolena $w_i' = 1$ jsou měřeny v obraze, jiná volba je také možná
- řešíme soustavu rovnic $\mathbf{Ah} = \mathbf{0}$ v případě pro 4 body kdy je $rank(\mathbf{A}) = 8$, pak existuje jedno řešení odpovídající pravému nulovému prostoru
- měřítko může být zvoleno tak aby $||\mathbf{h}|| = 1$
- často volíme více bodů ($n > 4$) a matice $\mathbf{A}$ má pak příslušný rozměr $2n \times 9$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -w_1'\mathbf{x}_1^T & y_1'\mathbf{x}_1^T \\ w_1'\mathbf{x}_1^T & \mathbf{0}^T & -x_1'\mathbf{x}_1^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & -w_n'\mathbf{x}_n^T & y_n'\mathbf{x}_n^T \\ w_n'\mathbf{x}_n^T & \mathbf{0}^T & -x_n'\mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5}$$

- v praxi měření obsahují chybu (šum) a tak získaná soustava je pře-určená, tedy neexistuje řešení $rank(\mathbf{A}) > 8$
- pak hledáme takové řešení, které minimalizuje chybu $||\mathbf{Ah}||$
- pro tento účel použijeme SVD rozklad (singular value decomposition)
- pak $\mathbf{A} = \mathbf{UDV^T}$ a hledané řešení $\mathbf{h}$ je poslední sloupec matice $\mathbf{V}$ odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu (pravý nulový prostor matice $\mathbf{A}$)

# Obsah přednášky

- Projektivní geometrie
  - projektivní prostor
  - projektivita
  - projektivní transformace
  - **zajímavé vlastnosti projektivní geometrie**

# Vlastnosti projektivní geometrie

- Nevlastní bod (vanishing point - úběžník)
- nevlastní body lze nalézt v běžném životě, např. dlouhé rovné koleje se v oku (obrázku) sbíhají
- koleje jsou rovnoběžné, v 3D prostoru se protnout nemohou
- projektivní transformace však v obraze tyto dvě přímky zdánlivě přibližuje
- tento zdánlivý průsečík je obrazem *nevlastních bodů* těchto přímek

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

## Definice

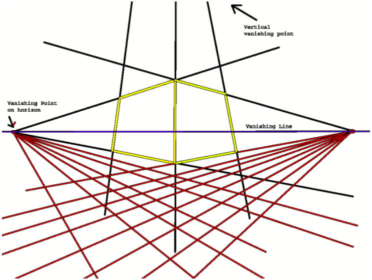
Nevlastní bod je limit projekce nějakého body, který se pohybuje po libovolné prostorové přímce do nekonečna.

- ukázka projekce dvou rovnoběžných prostorových přímek a jejich průsečík
- je možné pouze z informací z obrázku určit počet pražců odspodu obrázku až ke vlaku?
- jak určit vzdálenost vlaku pokud víme, že vzdálenost pražců je 0,806 m?

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Nevlastní přímka, (vanishing line - úběžnice)

- nevlastní přímka je přímka v obraze tzv. průsečnice dvou (všech) **rovnoběžných** prostorových rovin
- nebo jako pozice všech nevlastních bodů všech přímek ležící v jedné prostorové rovině
- např. **horizont** ... pohled na otevřené moře ... rovnoběžné prostorové přímky běžící po hladině se na horizontu protínají

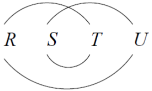


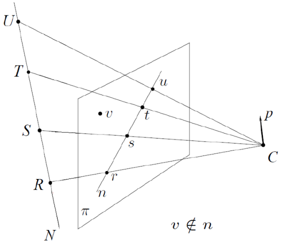

- pak tyto průsečíky jsou obrazy nevlastních bodů a horizont obraz nevlastní přímky

# Dvojpoměr (cross ratio)

- dvojpoměr je číslo, které charakterizuje poměr délek úseků mezi čtyřmi kolineárními body (body na jedné prostorové přímce)
- tyto čtyři kolineární prostorové body R,S,T a U definují dvojpoměr jako:

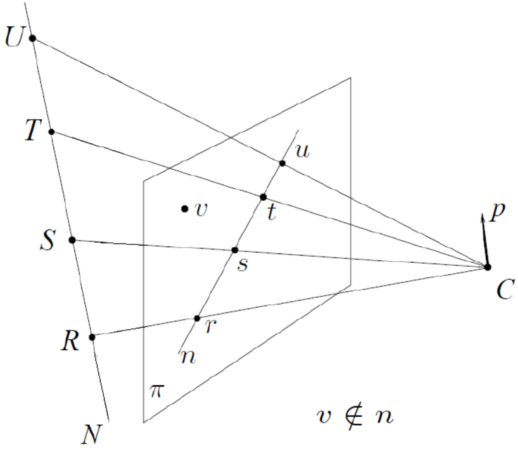
$$[RSTU] = \frac{|RT|}{|RU|}\frac{|SU|}{|ST|} \qquad (6)$$



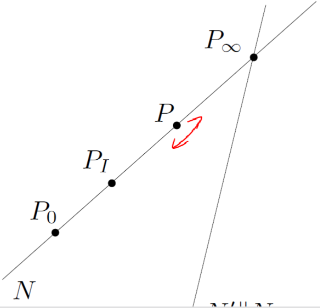

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

- dvojpoměr je invariantní kolineaci
- dvojpoměr je invariantní perspektivní transformaci



# 1D projektivní souřadnice

- mějme nějaké čtyři (tři) body náležící prostorové přímce
- jsou promítnuty do obrazové roviny nějaké kamery (kolineace)
- pak v této kameře platí stejný dvojpoměr, jako v původní přímce
- předpokládejme, že poslední (čtvrtý) bod je úběžník, který v obraze má konečnou souřadnici
- tento fakt nám umožňuje měřit o obraze **bez dalších znalostí** projektivní transformace

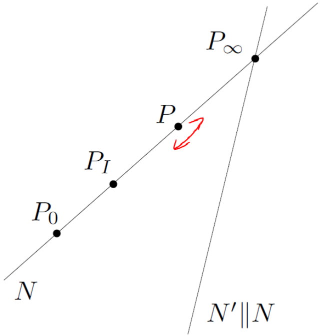



DEPARTMENT OF CYBERNETICS

$$[P] = [P_\infty P_0 P_l P] = \frac{|P_\infty P_l|}{|P_0 P_l|} \frac{|P_0 P|}{|P_\infty P|} \tag{7}$$

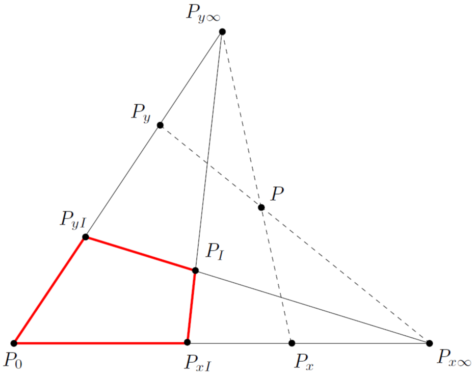
- $P_0$ - je počátek zvoleného souřadného systému $[P_0] = 0$
- $P$ - **pracovní bod**, jeho souřadnici v prostoru chceme určit
- $P_l$ - je bod určující měřítko, můžeme zvolit $[P_l] = 1$ nebo z velikosti známého objektu (umístěný v daném směru osy).
- $P_\infty$ - pomocný bod (nevlastní bod dané prostorové přímky - osy) $[P_\infty] = \pm\infty$

$$[P] = [P_\infty P_0 P_I P] = \frac{|P_\infty P_I|}{|P_0 P_I|} \frac{|P_0 P|}{|P_\infty P|} \tag{8}$$



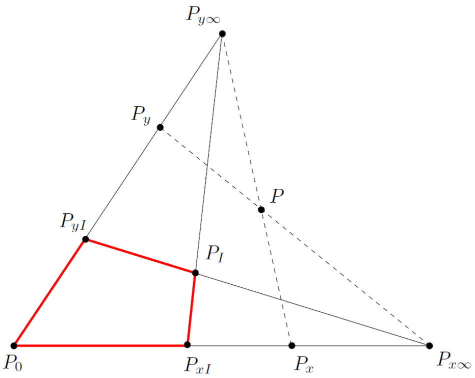

# 2D projektivní souřadnice

- rozšířením můžeme zavést měření ve dvou na sebe kolmých osách (2D Euklidovský prostor)
- umožňuje nám měřit podél prostorové roviny (např. podlaha) za pomoci její projekce do obrazu bez další znalostí (kalibrace kamery aj.)




DEPARTMENT OF CYBERNETICS

- souřadnice (x,y) libovolného bodu této prostorové roviny se analogicky určí jako:
$[P_x] = [P_{x\infty} P_0 P_{xI} P_x]$
$[P_y] = [P_{y\infty} P_0 P_{yI} P_y]$




- 