Simultaneous Localization And Mapping

KKY/RVB Lecture SLAM

Ing. Petr Neduchal

Department of Cybernetics
Faculty of Applied Sciences
University of West Bohemia

ESF projekt Západočeské univerzity v Plzni
reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002287

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

What is SLAM?

Localization

estimating the robot's pose – map is given.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

What is SLAM?

Localization

estimating the robot's pose – map is given.

Mapping

building a map of the environment – pose is given.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

What is SLAM?

Localization

estimating the robot's pose – map is given.

Mapping

building a map of the environment – pose is given.

SLAM

building a map and localizing of the robot simultaneously.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

What is SLAM?

Localization

estimating the robot's pose – map is given.

Mapping

building a map of the environment – pose is given.

SLAM

building a map and localizing of the robot simultaneously. Using sensors equipped by the robot.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

What is SLAM?

Chicken-or-egg problem

- Map is needed for localization.
- Pose is needed to mapping.

What is the main use of SLAM?

- local navigation systems
- autonomous robots and vehicles
- exploration systems

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

SLAM applications

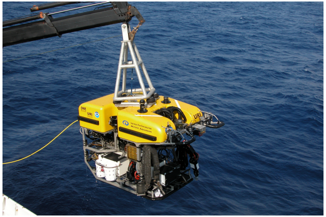
indoor × outdoor

- using various sensors it can operates either in indoor or outdoor environment
- **indoor sensors:** 2D/3D LiDAR, RGBD camera, RGB camera, ...
- **outdoor sensors:** 3D Lidar, RGB camera, ...

SLAM applications

air, underwater, ground

- ground and air environments are usually easier to handle than underwater environments because of different properties of the environment.



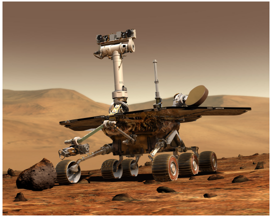
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

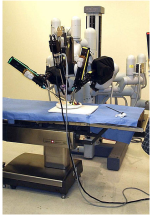
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

SLAM applications

Application examples:

- **indoor:** vacuum cleaner, exploring mines,
- **outdoor:** lawn mower, reef monitoring, terrain mapping, surveillance applications,
- **specific:** medicine – endoscopic mapping, navigation during medical operations





Math Notation

Given

- robot's controls

$$u_{1:T} = \{u_1, u_2, \ldots u_T\} \tag{1}$$

- observations

$$z_{1:T} = \{z_1, z_2, \ldots z_T\} \tag{2}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Math Notation

Given

- robot's controls

$$u_{1:T} = \{u_1, u_2, \dots u_T\} \tag{1}$$

- observations

$$z_{1:T} = \{z_1, z_2, \dots z_T\} \tag{2}$$

Wanted

- map of the environment

$$m \tag{3}$$

- path of the robot

$$x_{0:T} = \{x_0, x_1, \dots x_T\} \tag{4}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Probabilistic approaches

Problem

Real world is influenced by uncertainty (robot's motion, sensor observations).

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Probabilistic approaches

Problem

Real world is influenced by uncertainty (robot's motion, sensor observations).

Solution

Use the probability theory to explicitly represent the uncertainty.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Probabilistic approaches

Problem

Real world is influenced by uncertainty (robot's motion, sensor observations).

Solution

Use the probability theory to explicitly represent the uncertainty.

Full SLAM

$$p\left(x_{0:t}, m \mid z_{1:t}, u_{1:t}\right) \tag{5}$$

Online SLAM

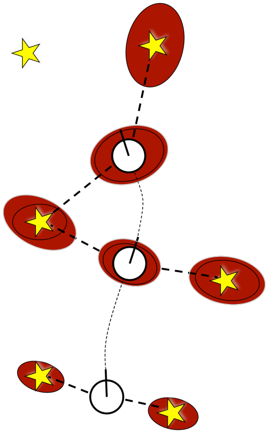
$$p\left(x_{t}, m \mid z_{1:t}, u_{1:t}\right) \tag{6}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Why it is hard?

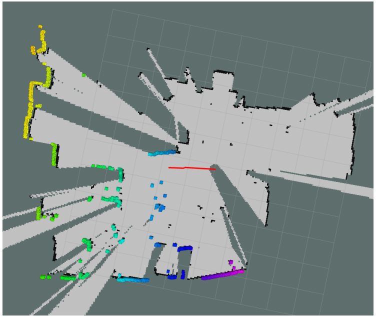
The main issues

1. Robot path and map are both unknown.
2. Mapping between observations and the map is unknown.
3. Wrong data association problem.
4. Sensor noise can influence results.
5. Environment uncertainty and dynamics.



Taxonomy

- volumetric (direct) vs. feature-based
- topological vs. geometric maps
- static vs. dynamic environment
- small vs. large uncertainty
- active vs. passive SLAM
- single-robot vs. multi-robot SLAM



History

Only few important dates

1985/86	Smith et al. and Durrant-Whyte describe geometric uncertainty and relationships between features or landmarks
1986	Discussions at ICRA on how to solve the SLAM problem followed by the key paper by Smith, Self and Cheeseman
1990-95	Kalman-filter based approaches
1995	SLAM acronym coined at ISRR'95
1995-1999	Convergence proofs & first demonstrations of real systems
2000	Wide interest in SLAM started

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Motion and Observation model

Motion model

Probability density of robot pose in time t when the previous robot pose and control vector are given.

$$p\left(x_t \mid x_{t-1}, u_t\right) \tag{7}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Motion and Observation model

Motion model

Probability density of robot pose in time t when the previous robot pose and control vector are given.

$$p\left(x_t \mid x_{t-1}, u_t\right) \tag{7}$$

Observation model

Probability density of sensor observation w.r.t. known robot pose.

$$p\left(z_t \mid x_t\right) \tag{8}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Motion and Observation model

Motion model

Probability density of robot pose in time t when the previous robot pose and control vector are given.

$$p\left(x_t \mid x_{t-1}, u_t\right) \tag{7}$$

Observation model

Probability density of sensor observation w.r.t. known robot pose.

$$p\left(z_t \mid x_t\right) \tag{8}$$

Models can be either Gaussian or non-Gaussian.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

State estimation - recursive Bayes Filter

Goal of the state estimation process

Estimate probability density of robot pose w.r.t. known sensor observations and control vectors.

$$p\left(x \mid z, u\right) \tag{9}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

State estimation - recursive Bayes Filter

Goal of the state estimation process

Estimate probability density of robot pose w.r.t. known sensor observations and control vectors.

$$p\left(x \mid z, u\right) \tag{9}$$

It can be rewritten in following manner, which defines Belief of the state space

$$bel\left(x_t\right) = p\left(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t}\right) \tag{10}$$

State estimation - recursive Bayes Filter

Prediction step

$$\overline{bel}\left(x_t\right) = \int p\left(x_t \mid x_{t-1}, u_t\right) bel\left(x_{t-1}\right) dx_{t-1} \tag{11}$$

State estimation - recursive Bayes Filter

Prediction step

$$\overline{bel}\left(x_t\right) = \int p\left(x_t \mid x_{t-1}, u_t\right) bel\left(x_{t-1}\right) dx_{t-1} \tag{11}$$

Correction step

$$bel\left(x_t\right) = \eta p\left(z_t \mid x_t\right) \overline{bel}\left(x_t\right) \tag{12}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Filters et al.

Types of filters

- linear vs. non-linear models
- gaussian vs. non-gaussian models
- parametric vs. non-parametric
- Kalman filter (KF, EKF, UKF, ...)
  - gaussian, parametric
  - linear or linearized models
- particle filter
  - non-parametric
  - arbitrary models (sampling)

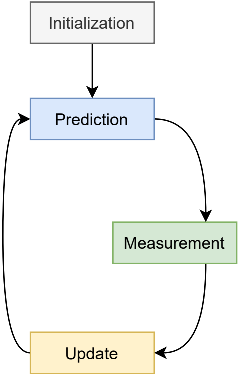


Figure: Filter based SLAM loop diagram

Kalman Filter

System model

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t \tag{13}$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t \tag{14}$$

Kalman Filter

System model

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t \tag{13}$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t \tag{14}$$

KF $(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t)$

$$\overline{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \tag{15}$$

$$\overline{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t \tag{16}$$

$$\kappa_t = \overline{\Sigma}_t C_t^T \left(C_t \overline{\Sigma}_t C_t^T + Q_t \right)^{-1} \tag{17}$$

$$\mu_t = \overline{\mu}_t + \kappa_t \left(z_t - C_t \overline{\mu}_t \right) \tag{18}$$

$$\Sigma_t = \left(I - \kappa_t C_t \right) \overline{\Sigma}_t \tag{19}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Extended Kalman Filter (EKF)

System model

$$x_t = g\left(u_t, x_{t-1}\right) + \varepsilon_t \tag{20}$$

$$z_t = h(x_t) + \delta_t \tag{21}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Extended Kalman Filter (EKF)

System model

$$x_t = g\left(u_t, x_{t-1}\right) + \varepsilon_t \tag{20}$$

$$z_t = h(x_t) + \delta_t \tag{21}$$

KF $\left(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t\right)$

$$\overline{\mu}_t = g\left(u_t, \mu_{t-1}\right) \tag{22}$$

$$\overline{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t \tag{23}$$

$$\kappa_t = \overline{\Sigma}_t H_t^T \left(H_t \overline{\Sigma}_t H_t^T + Q_t\right)^{-1} \tag{24}$$

$$\mu_t = \overline{\mu}_t + \kappa_t \left(z_t - h\left(\overline{\mu}_t\right)\right) \tag{25}$$

$$\Sigma_t = \left(I - \kappa_t H_t\right) \overline{\Sigma}_t \tag{26}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

EKF SLAM

- Using EKF for solving Online SLAM problem.
- Estimate robot's pose and locations of landmarks in the environment.
- State space (2D case)

$$\mu_t = (\mathbf{x}, \mathbf{m})^T = (x, y, \theta, m_{1,x}, m_{1,y}, \ldots, m_{n,x}, m_{n,y})^T \tag{27}$$

- Map with n landmarks $\rightarrow 3 + 2n$ dimensional Gaussian.

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xm} \\ \Sigma_{mx} & \Sigma_{mm} \end{pmatrix} \tag{28}$$

EKF SLAM

EKF SLAM cycle

1. State and measurement prediction
2. Measurement
3. Data association
4. Update

Properties

- Correlation between landmarks and robot's pose.
- In the limit $\rightarrow$ estimates fully correlated.
- cost per step $O(n^2)$, memory consumption $O(n^2)$
- Computationally intractable for large maps.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Particle Filter SLAM

Properties

- Approach for dealing with arbitrary distribution.
- particle set: $\chi = \{\langle x^{[j]}, w^{[j]} \rangle\}_{j=1,\dots,J}$
- Importance sampling principle – estimating properties of a particular distribution
- Particle filter
  - non-parametric recursive Bayes filter
  - models distribution by samples
  - prediction: draws from proposal
  - correction: weighting by ratio of target and proposal
  - the more samples we use the better is the estimate

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Particle Filter SLAM - principle

- Sample particles using the proposal distribution

$$x_t^{[j]} \sim \pi(x_t \mid \ldots) \tag{29}$$

- Compute the importance weights

$$w_t^{[j]} = \frac{target(x_t^{[j]})}{proposal(x_t^{[j]})} \tag{30}$$

- Resampling: Replace unlikely samples bz more likely ones
- Correction via the observation model

$$w_t^{[j]} = \frac{target(x_t^{[j]})}{proposal(x_t^{[j]})} \propto p(z_t \mid x_t, m) \tag{31}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Particle Filter SLAM

- State in Particle Filter SLAM

$$x = (x_{1:t}, m_{1,x}, m_{1,y}, \dots, m_{M,x}, m_{M,y})^T \tag{32}$$

Problem Dimensionality problem (higher dimensions $\rightarrow$ more samples)

Solution Use the particle set only to model the robot's path.

- Each sample is a path hypothesis
- For each sample $\rightarrow$ An individual map of landmarks.
- Each landmark updated by 2 dimensional EKF filter.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Least Square (Graph Based) SLAM

Principle

- Solving SLAM by computing a solution of an over-determined system
- Minimizes sum of the squared errors
- Using a graph to represent the problem
- Node is the robot pose
- Edge is a spatial measurement
- Goal: Build the graph (Front-End) and find a node configuration that minimize the measurement error (Back-End).
- Error function:

$$x^* = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \sum_k e_k^T(x)\Omega_k e_k(x) \tag{33}$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Thank you for your attention!

Questions?

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

DEPARTMENT OF CYBERNETICS