Eulerova metoda řešení ODE

Předpokládejme diferenciální rovnici:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), t]$$

Nechť h reprezentuje periodu vzorkování => $t = kh$ => $t + h = (k+1)h$

$k = 0, 1, 2, ...$ … počet kroků, (někdy se h vynechává)

Taylorův rozvoj řešení $x(t)$ v bodě $x(kh)$:

$$x[(k+1)h] = x(kh) + \frac{1}{1!}\frac{dx(t)}{dt}|_{t=kh} \cdot h + \frac{1}{2!}\frac{dx^2(t)}{dt^2}|_{t=kh} \cdot h^2 + \frac{1}{3!}\frac{dx^3(t)}{dt^3}|_{t=kh} \cdot h^3 + ...$$

Aproximací (zanedbání vyšších členů Taylorova rozvoje) a dosazením $\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), t]$ dostáváme:

<u>Eulerovu metodu řešení diferenciálních rovnic</u>:

$$x[(k+1)h] \approx x(kh) + f[x(kh), kh] \cdot h \tag{1}$$

Přesnost metody (rozdíl mezi aproximací a přesným řešením):

$$\epsilon = \frac{1}{2!}\frac{dx^2(t)}{dt^2}|_{t=kh} \cdot h^2 + \frac{1}{3!}\frac{dx^3(t)}{dt^3}|_{t=kh} \cdot h^3 + ... \approx O(h^2)$$

Řešení diferenciálních rovnic vyššího řádu:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y(t)^{(n-1)} + ... + a_0 y(t) = u(t)$$

$$\Big\downarrow \text{ Zavedením stavu } x_1(t) = y(t),\ \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t)$$

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t],\quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}, f[*] = [f_1[*], ..., f_n[*]]^T$$

Použití Eulerovy metody pro vektory...

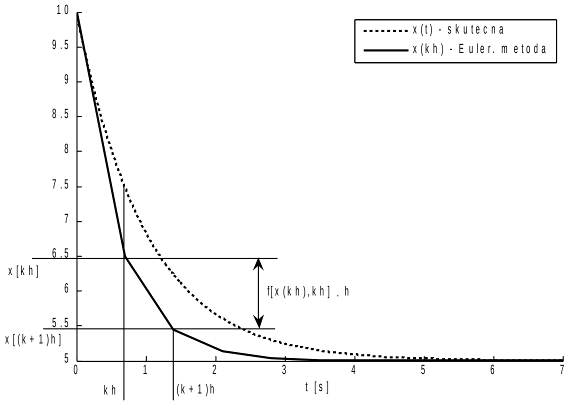
Eulerova metoda

- 1 kroková (výpočet $x[(k+1)h]$ pouze z jedné minulé hodnoty $x[kh]$)
- 1. řádu (vynechání vyšších členů Talorova rozvoje)

Další metody řešení diferencinciálních rovnic:

- Runge-Kutta – 1 kroková, 4. řádu
- Adamsova – 4 kroková, 3. řádu
- …

Grafická interpretace:



Příklad (Eulerova metoda pro systém 1. řádu)**:**

$$\frac{dx(t)}{dt}=\underbrace{5-x(t)}_{f[x(t),t]}\quad \text{, poč. podmínky} \quad x(0)=10$$

Eulerova metoda, viz (1):

$$x[(k+1)h]\approx x(kh)+[5-x(kh)]\cdot h \quad , \quad k=0,1,2,\ldots$$

Pozn.:

Přesné (analytické) řešení diferenciální rovnice: $y(t)=5e^{-t}+5$

<u>Výsledky řešení pro různé hodnoty periody vzorkování</u> h