Obsah

1 Modelování systémů 2. řádu

K popisu systémů máme v kybernetice k dispozici řadu možností, se kterými se seznámíte později. Cílem tohoto textu je konfrontace pojmů, se kterými se budete setkávat v matematice a v kybernetice, a které popisují stejnou věc.

Jako příklad je popis systému diferenciální rovnicí

$$y''(t) + a \cdot y'(t) + b \cdot y(t) = u(t) \tag{1.1}$$

kde $y(t)$ je tzv. výstup ze systému, $u(t)$ je tzv. vstup do systému, t je čas, a, b jsou parametry systému.

Případně stejný systém popsán stavovým popisem, což je v matematice nazýváno soustava diferenciálních rovnic 1.řádu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.2}$$

A nebo další způsob, nazývaný obrazový přenos.

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + a\,p + b} \tag{1.3}$$

Všechny způsoby popisují to samé (např. RLC obvod, matematické kyvadlo, závaží na pružině). V případě kyvadla by signál $y =$ hel, $y' =$ rychlost, $y'' =$ zrychlen. Řešením rovnic (1.1), (1.2), (1.3) je funkce $y(t)$, tj. funkce popisující průběh úhlu φ pro čas t.

Je důležité mít představu o tom, jak se systém chová aniž bychom museli řešit diferenciální rovnice, provádět simulace či experimenty. I proto se určují kořeny charakteristické rovnice (1.1), vlastní čísla matice z (1.2) nebo póly přenosu (1.3). Ačkoli se nazývají různě, jedná se o stejná čísla.

Charakteristický polynom

Při určování charakteristického polynomu vyjdeme z diferenciální rovnice bez pravé strany, tj. použijeme rovnici (1.1) s $u(t) = 0$.

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

Derivaci nahradíme mocninou, proměnnou y za λ

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda^1 + b \cdot \underbrace{\lambda^0}_{=1} = 0 \tag{1.4}$$

tj.

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0 \tag{1.5}$$

Vlastní čísla matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + a \cdot \lambda + b \tag{1.6}$$

Póly přenosu

$$p^2 + a \cdot p + b = 0 \tag{1.7}$$

Na základě kořenů / vlastních čísel / pólů budeme znát chování systému bez nutnosti řešení diferenciální rovnice. Je však dobré vědět, že vědomost o chování systému z pouhé znalosti kořenů / vlastních čísel / pólů plyne z řešení diferenciální rovnice.

2 Řešení diferenciální rovnice

Výpočet řešení rovnice (1.1) $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = u$ je rozdělen do částí:

A) $y_H(t)$ – odezva na počáteční podmínky (tj. odezva na minulé vstupy), v matematice nazýváno homogenní řešení, popisuje vlastní dynamiku systému

B) $y_P(t)$ – odezva na vstup, v matematice partikulární řešení (pokud je vstup $u(t)$ nulový tento krok odpadá, tj. $y_p = 0$)

C) $y(t)$ – celé řešení je součet $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

D) použití nejčastěji počátečních podmínek $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, okrajových podmínek apod.

A) Odezva na počáteční podmínky

Derivaci nahradíme mocninou, proměnnou y za λ

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$$

potom pro systém 2. řádu mohou nastat následující varianty chování

varianta i: $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$ a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $(a = \lambda_1 + \lambda_2,\ b = \lambda_1 \cdot \lambda_2) \Rightarrow$ **nekmitavá** odezva

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{2.1}$$

varianta ii: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda \in \Re$ $(a = 2\lambda,\ b = \lambda^2) \Rightarrow$ **nekmitavá** odezva

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2\, t\, e^{\lambda t} \tag{2.2}$$

varianta iii: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad (a = 2\alpha,\ c = \alpha^2 + \beta^2) \Rightarrow$ **kmitavá** odezva

$$\begin{aligned} y_H(t) &= C_1 e^{(\alpha + i\beta)\, t} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)\, t} \\ &= e^{\alpha\, t}\left(C_1 \sin(\beta\, t) + C_2 \cos(\beta\, t)\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ve všech variantách C_1 a C_2 jsou konstanty, které jsou určeny z počátečních podmínek.

Důležitou vlastností, které ovlivňuje chování celého systému, jsou znaménka reálných částí kořenů, tj. $Re(\lambda_1)$, $Re(\lambda_2)$, resp. $Re(\lambda)$, resp. $Re(\alpha)$. Pokud jsou reálné části všech kořenů záporné, řekneme, že systém je stabilní.

Pokud si spočítáme limitu y_H pro $t \to \infty$, zjistíme že platí následující

varianta i: $\lambda_1 < 0 \Rightarrow \lambda_1 = -|\lambda_1|$ a $\lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_2 = -|\lambda_2|$

$$\lim_{t\to\infty} y_H(t) = \lim_{t\to\infty}\left(C_1 \underbrace{e^{-|\lambda_1|\, t}}_{\to 0} + C_2 \underbrace{e^{-|\lambda_2|\, t}}_{\to 0}\right) = 0 \tag{2.4}$$

varianta ii: $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = -|\lambda|$

$$\lim_{t\to\infty} y_H(t) = \lim_{t\to\infty}\left(C_1 \underbrace{e^{-|\lambda|\, t}}_{\to 0} + C_2 \underbrace{\frac{t}{e^{|\lambda|\, t}}}_{\to 0}\right) = 0 \tag{2.5}$$

varianta iii $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -|\alpha|$

$$\lim_{t\to\infty} y_H(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{e^{-|\alpha|\, t}}_{\to 0}\left(C_1 \sin(\beta\, t) + C_2 \cos(\beta\, t)\right)\right) = 0 \tag{2.6}$$

kde α odpovídá tlumení systému, β vlastní frekvenci kmitání.

Z matematického hlediska bychom řekli, že funkce pro t rostoucí do nekonečna konverguje. V kybernetice říkáme, že systém je stabilní.

A naopak systém je nestabilní (řešení $y_H(t)$ diverguje) v případě, že kořeny jsou:

varianta i: $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$ nebo $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$ nebo $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$

$$\lim_{t\to\infty} y_H(t) = \lim_{t\to\infty} \left(C_1 e^{\lambda_1 t} +\ C_2 e^{\lambda_2 t}\right) = \infty \tag{2.7}$$

varianta ii: $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to\infty} y_H(t) = \lim_{t\to\infty} \left(C_1 e^{\lambda t} +\ C_2\, t\, e^{\lambda t}\right) = \infty \tag{2.8}$$

varianta iii $\alpha > 0$

$$\lim_{t\to\infty} y_H(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\underbrace{e^{\alpha t}}_{\to\infty} (C_1 \sin(\beta\, t) + C_2 \cos(\beta\, t))\right) = \infty \tag{2.9}$$

Nakonec uveďme systém tzv. na mezi stability, z matematického hlediska bychom řekli, že funkce pro t rostoucí do nekonečna nekonverguje.

varianta iii $\alpha = 0$

$$\lim_{t\to\infty} y_H(t) = \lim_{t\to\infty} (C_1 \sin(\beta\, t) + C_2 \cos(\beta\, t)) \tag{2.10}$$

Výsledkem je kmitavý charakter se stále stejnou amplitudou. Systém je bez tlumení.

B) Odezva na vstup

V případě, že vstup $u(t)$ není nulový, tj. jedná se diferenciální rovnici s pravou stranou, jsou v zásadě dva způsobu nalezení odezvy na vstup (nalezení partikulárního řešení)

(i) variance konstant

(ii) odhad pravé strany

Odhad pravé strany Vlastností systémů je snaha „kopírovat" vstupní signál (pravou stranu). Ovšem toto kopírování se plně projeví až poté, co přestane převládat odezva na počáteční podmínku.

Odhad pravé strany je vhodný pouze pro některé typy vstupů, např: konstanta, sinus, kosinus, polynom, exponenciála. Odhadované partikulární řešení je pak řešením diferenciální rovnice, proto musí této rovnici vyhovovat, čili musíme stanovit y'_P a y''_P a spolu s odhadem y_P dosadit do diferenciální rovnice.

V kybernetice některé z těchto signálů používáme pro poznání chování systému, či pro tzv. identifikaci[1]. Mezi, v kybernetice, často používané vstupy patří: jednotkový skok, Diracův impuls a sinusový signál.

Jednotkový skok (v matematice konstanta) Také Heavisideova funkce je nespojitá funkce.

$$\begin{aligned} u(t) &= A \quad \text{pro } t \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{jinak} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Označení jednotkový skok je informativní, neboť velikost skoku může být různá (ve funkci (2.11) označeno A). V kybernetice mluvíme o odezvě na jednotkový skok, čili o přechodové charakteristice či přechodové funkci.

Odhad pravé strany pro vstupní signál rovný jednotkovému skoku Odezvu na vstup (partikulární řešení) volíme ve tvaru:

$$y_P = K \tag{2.12}$$

kde K je konstanta, kterou potřebujeme určit, tj. $y'_P = 0$ a $y''_P = 0$. Odtud po dosazení (2.12) do (1.1) a za předpokladu, že $u(t) = A$, dostaneme:

$$\begin{aligned} y''_P + a \cdot y'_P + b \cdot y_P = A \\ 0 + a \cdot 0 + b \cdot K = A \end{aligned} \tag{2.13}$$

potom

$$y_P = K = \frac{A}{b} \tag{2.14}$$

[1]Identifikace, v případě systému popsaného rovnicí (1.1), znamená stanovení neznámých koeficientů a, b.

Sinusový signál Sinusový signál se v kybernetice používá k získání bodu frekvenční charakteristiky.

$$\begin{aligned} u(t) &= A_1 \sin(\omega\, t) \quad \text{pro } t \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{jinak} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Odezvu na vstup (partikulární řešení) volíme ve tvaru:

$$y_P = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \tag{2.16}$$

nebo

$$y_P = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) \tag{2.17}$$

Diracův impuls Diracův impuls nabývá nenulové hodnoty v jediném bodě $t = 0$, v tomto bodě nabývá nekonečné hodnoty. Integrál této funkce je roven jedné. Diracův impuls není realizovatelný, proto se používá aproximace

$$\begin{aligned} u(t) &= \tfrac{1}{\varepsilon} \quad \text{pro } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ &= 0 \quad \text{jinak} \end{aligned} \tag{2.18}$$

kde ε je zvolený parametr o malé hodnotě.

V tomto případě není řešení úplně jednoduché a snáze se hledá za pomoci přenosu (1.3) a znalosti, že v Laplaceových proměnných pro výstup platí:

$$Y(p) = F(p) \cdot U(p) \tag{2.19}$$

a že Diracův impuls je roven $U(p) = 1$, potom řešení je inverzní Laplaceova transformace[2]

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) \tag{2.20}$$

Druhá možnost je použít odezvu na jednotkový skok, neboť odezva na Diracův impuls je derivací odezvy na jednotkový skok. V kybernetice mluvíme o odezvě na jednotkový impuls, čili o impulsní charakteristice či impulsní funkci.

[2] Laplaceova transformace pro známé funkce je v tabulkách

D) Použití počátečních podmínek

Vyjdeme z celého řešení $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$. Např. pro dva různé kořeny (2.1) a konstantní pravou stranu (2.14) je celé řešení:

$$y(t) = \underbrace{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}_{\text{odezva na počáteční podmínky}} + \underbrace{\frac{A}{b}}_{\text{odezva na konstantní vstup}} \tag{2.21}$$

kde neznámé konstanty C_1 a C_2 určíme z počátečních podmínek $y(0) = y_0$ a $y'(0) = y'_0$. Do rovnice řešení (2.21) dosadíme $t = 0$ a $y(0) = y_0$. Dále spočítáme derivaci $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 \cdot t}$.

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + C_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} + \tfrac{A}{b} \\ y'_0 &= \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} \end{aligned} \tag{2.22}$$

nebo-li

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 - \frac{A}{b} \\ y'_0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Odtud jsou

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{y'_0 - \lambda_2 y + \frac{A\lambda_2}{b}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ C_2 &= \frac{y'_0 - \lambda_1 y + \frac{A\lambda_1}{b}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned} \tag{2.24}$$

3 Ukázka řešení č. 1

$$y'' + 3y' + 2y = 6, \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{3.1}$$

A) Odezva na minulé vstupy

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \tag{3.2}$$

Kořeny této rovnice jsou: $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$. Systém je **nekmitavý** a **stabilní (konvergentní)**.

$$y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \tag{3.3}$$

B) Odezva vstup

Volíme ji

$$y_P(t) = K \tag{3.4}$$

kde K je konstanta, kterou potřebujeme určit, tj. $y'_P = 0$ a $y''_P = 0$. Odtud po dosazení dostaneme:

$$\begin{gathered} y''_P + 3 \cdot y'_P + 2 \cdot y_P = 6 \\ 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot K = 6 \end{gathered} \tag{3.5}$$

potom

$$y_P = K = \frac{6}{2} = 3 \tag{3.6}$$

C) Celé řešení

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 3 \tag{3.7}$$

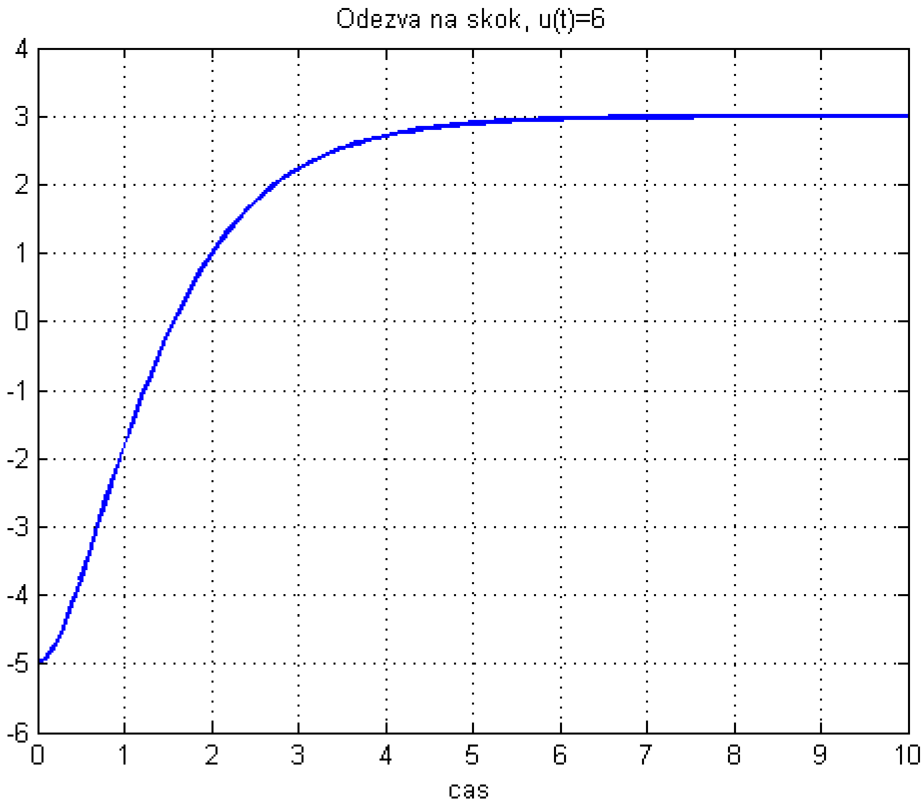
D) Počáteční podmínky

$$\begin{aligned} -5 &= C_1 + C_2 + 3 \\ 0 &= -C_1 - 2\,C_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

řešení je $C_1 = -16$ a $C_2 = 8$

Výsledné řešení

$$y(t) = -16e^{-t} + 8e^{-2t} + 3 \tag{3.9}$$



Zadání ve wolframalpha.com

```
y'' + 3 y' + 2 y = 6, y(0)=-5, y'(0)=0
```

V časech $t \in \langle 0; 5 \rangle$ převládá vliv samotného systému, který je dán homogenním řešením: $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$. Vstupní signál v těchto časech výsledek samozřejmě ovlivňuje, ale ne tolik. Od času $t > 5$ již převládá odezva na vstupní signál.

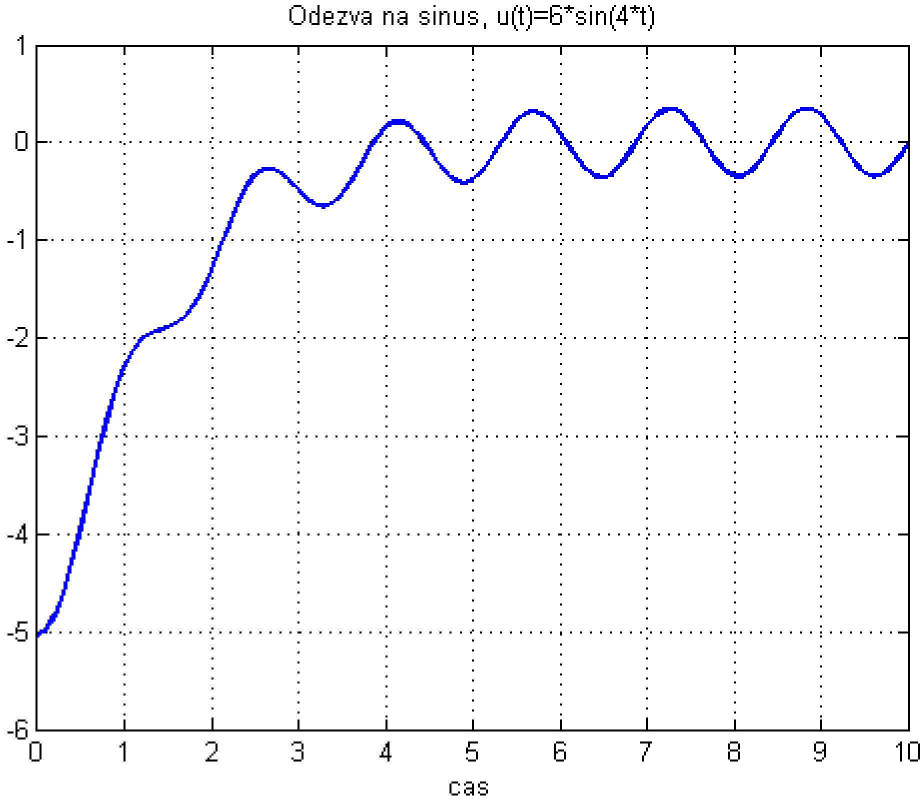
4 Ukázka řešení č. 2

$$y'' + 3y' + 2y = 6\sin(4\,t), \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{4.1}$$

Stejná rovnice, stejná odezva na minulé vstupy (počáteční podmínku), jiná odezva na vstup. Postup řešení je stejný jako předtím, jen trochu delší. Systém je **nekmitavý** a **stabilní (konvergentní)**.

Výsledné řešení

$$y(t) = -\frac{730}{85}e^{-t} + \frac{323}{85}e^{-2t} - \frac{21}{85}\sin(4\,t) - \frac{18}{85}\cos(4\,t) \tag{4.2}$$



Kmitání v tomto grafu není způsobeno tím, že by systém byl kmitavý! Systém samotný je nekmitavý. Kmitání je způsobeno vstupním signálem $u(t) = 6\sin(4\,t)$.

Zadání ve wolframalpha.com

```
y'' + 3 y' + 2 y = 6 sin(4 x), y(0)=-5, y'(0)=0
```

V časech $t \in \langle 0; 5\rangle$ převládá vliv samotného systému, který je dán homogenním řešením: $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$. Vstupní signál v těchto časech výsledek samozřejmě ovlivňuje, ale ne tolik. Od času $t > 5$ již převládá odezva na vstupní signál.

5 Ukázka řešení č. 3

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{5.1}$$

Stejná rovnice, stejná odezva na minulé vstupy (počáteční podmínku), ale bez odezvy na vstup (bez pravé strany).

A) Odezva na minulé vstupy

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \tag{5.2}$$

Kořeny této rovnice jsou: $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$. Systém bude **nekmitavý** a **stabilní**.

$$y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \tag{5.3}$$

B) Odezva vstup

Pravá strana je nulová, tj. odezva na vstup není přítomna.

C) Celé řešení

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \tag{5.4}$$

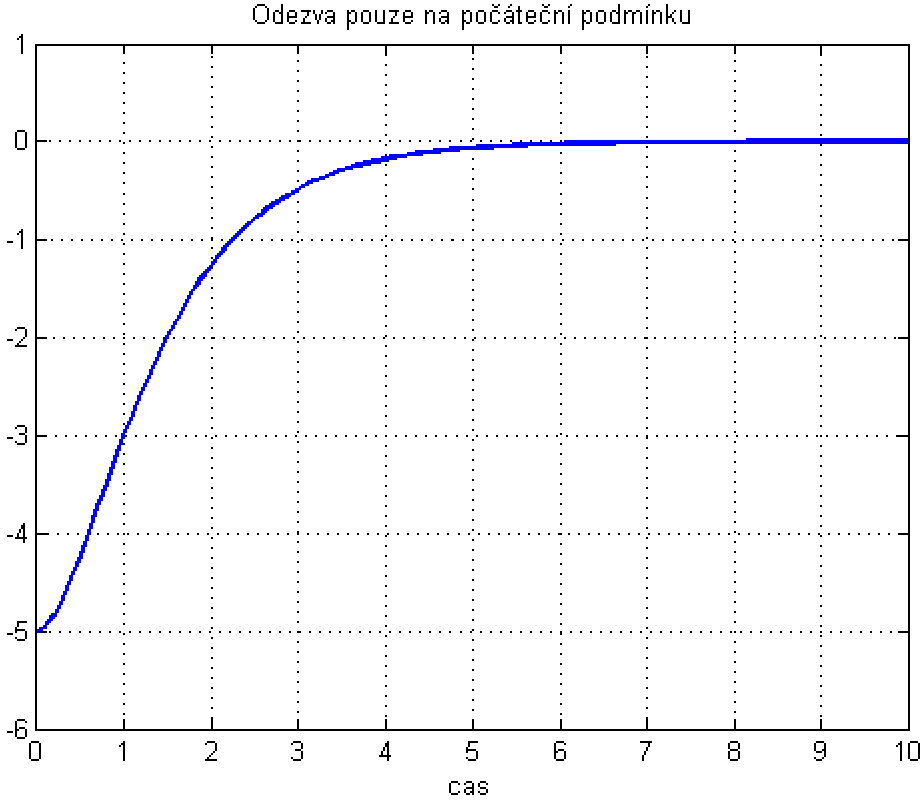
D) Počáteční podmínky

$$\begin{aligned} -5 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= -C_1 - 2\,C_2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

řešení je $C_1 = -10$ a $C_2 = 5$

Výsledné řešení

$$y(t) = -10e^{-t} + 5e^{-2t} \tag{5.6}$$



Zadání ve wolframalpha.com

```
y'' + 3 y' + 2 y = 0, y(0)=-5, y'(0)=0
```

V tomto případě v časech $t \in \langle 0; 5\rangle$ převládá vliv samotného systému, který je dán homogenním řešením: $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$. Vstupní signál v těchto časech výsledek samozřejmě ovlivňuje, ale ne tolik. Od času $t > 5$ již tento vliv odezněl, proto je hodnota $y(t) = 0$. Všimněte si podobnosti této křivky s křivkou odezvy na skok.

6 Ukázka řešení č. 4

$$y'' + 0,4y' + 1,04y = 6, \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{6.1}$$

A) Odezva na minulé vstupy

$$\lambda^2 + 0,4\lambda + 1,04 = 0 \tag{6.2}$$

Kořeny této rovnice jsou: $\lambda_1 = -0,2 + i$ a $\lambda_2 = -0,2 - i$. Systém bude **kmitavý** a **stabilní**.

$$y_H(t) = e^{-0,2\,t}\,(C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)) \tag{6.3}$$

B) Odezva vstup

Volíme ji

$$y_P(t) = K \tag{6.4}$$

kde K je konstanta, kterou potřebujeme určit, tj. $y'_P = 0$ a $y''_P = 0$. Odtud po dosazení dostaneme:

$$\begin{array}{r} y''_P + 0,4 \cdot y'_P + 1,04 \cdot y_P = 6 \\ 0 + 0,4 \cdot 0 + 1,04 \cdot K = 6 \end{array} \tag{6.5}$$

potom

$$y_P = K = \frac{6}{1,04} = 5,7693 \tag{6.6}$$

C) Celé řešení

$$y(t) = e^{-0,2\,t}\,(C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)) + 5,7693 \tag{6.7}$$

D) Počáteční podmínky

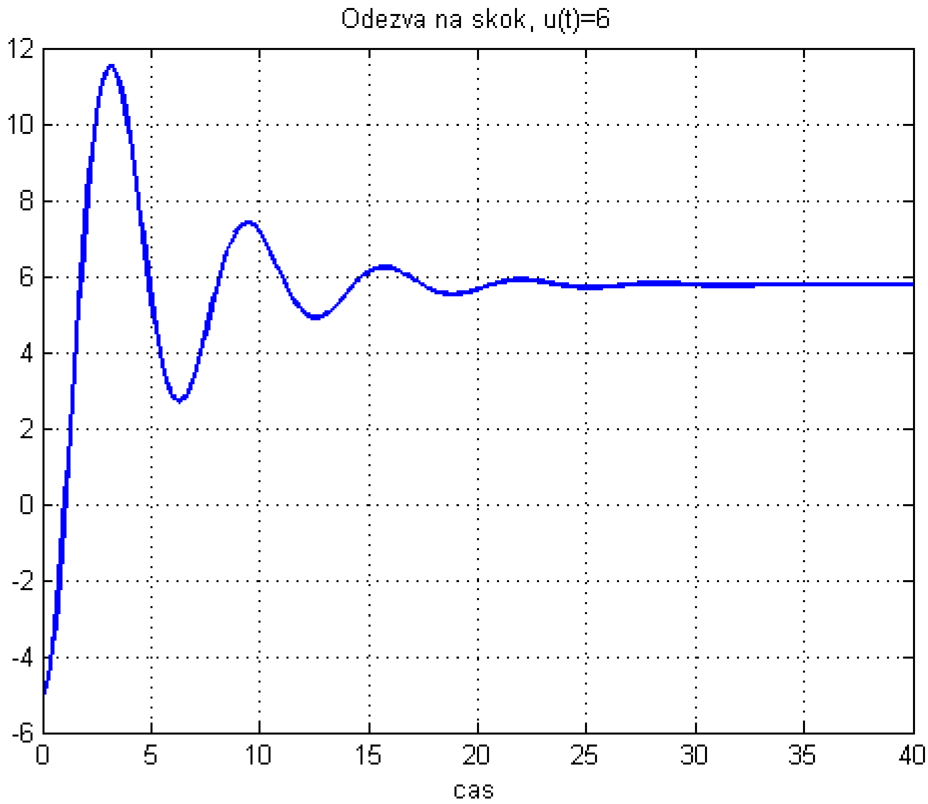
$$\begin{array}{rcl} -5 & = & e^{-0,2\cdot 0}\,(C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0)) + 5,7693 \\ 0 & = & e^{-0,2\cdot 0}\,[(-0,2C_1 - C_2)\sin(0) + (-0,2C_2 + C_1)\cos(0)] \end{array} \tag{6.8}$$

$$\begin{array}{rcl} -5 & = & C_2 + 5,7693 \\ 0 & = & -0,2\,C_1 + C_2 \end{array} \tag{6.9}$$

řešení je $C_1 = -10,7692$ a $C_2 = -2,1539$

Výsledné řešení

$$y(t) = e^{-0,2\,t}\,(-10,7692 \sin(t) - 2,1539 \cos(t)) + 5,7693 \tag{6.10}$$



Zadání ve wolframalpha.com

```
y'' + 0.4 y'+ 1.04 y = 6, y(0)=-5, y'(0)=0
```

V časech $t \in \langle 0; 30 \rangle$ převládá vliv samotného systému, který je dán homogenním řešením: $y(t) = e^{-0{,}2\,t}\,(C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t))$. Vstupní signál v těchto časech výsledek samozřejmě ovlivňuje, ale ne tolik. Od času $t > 30$ již převládá odezva na vstupní signál.

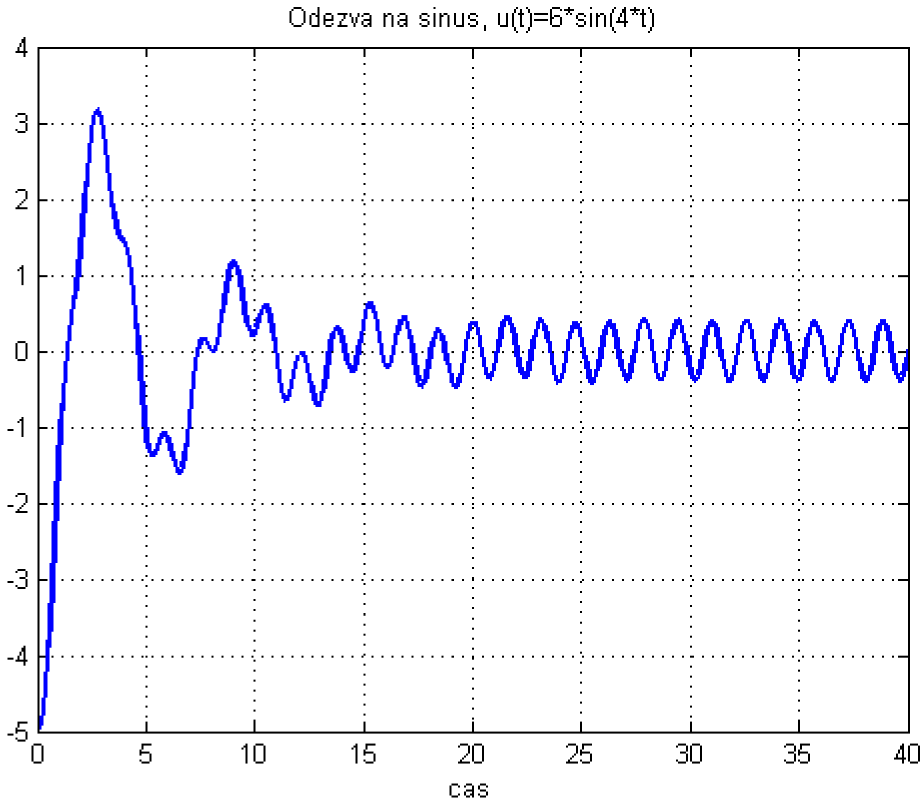
7 Ukázka řešení č. 5

$$y'' + 0,4y' + 1,04y = 6\sin(4\,t), \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{7.1}$$

Stejná rovnice, stejná odezva na minulé vstupy (počáteční podmínku), jiná odezva na vstup. Postup řešení je stejný jako předtím, jen delší. Systém bude **kmitavý** a **stabilní**.

Výsledné řešení

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-0,2\,t}\,(0,5946\sin(t) - 4,9576\cos(t)) - \\ &\quad -0,3965\sin^2(t)\sin(4t) - 0,0424\cos(4t) - 0.3965\sin(4t)\cos^2(t) \end{aligned} \tag{7.2}$$



Zadání ve wolframalpha.com

```
y'' + 0.4 y'+ 1.04 y = 6 sin(4 x), y(0)=-5, y'(0)=0
```

V časech $t \in \langle 0; 30\rangle$ převládá vliv samotného systému, který je dán homogenním řešením: $y(t) = e^{-0,2\,t}\,(C_1\sin(t) + C_2\cos(t))$. Vstupní signál v těchto časech výsledek samozřejmě ovlivňuje, ale ne tolik. Od času $t > 30$ již převládá odezva na vstupní signál.

8 Ukázka řešení č. 6

$$y'' + 0,4y' + 1,04y = 0, \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{8.1}$$

A) Odezva na minulé vstupy

$$\lambda^2 + 0,4\lambda + 1,04 = 0 \tag{8.2}$$

Kořeny této rovnice jsou: $\lambda_1 = -0,2 + i$ a $\lambda_2 = -0,2 - i$. Systém bude **kmitavý** a **stabilní**.

$$y_H(t) = e^{-0,2\,t}\,(C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)) \tag{8.3}$$

B) Odezva vstup

Nulová pravá strana proto není odezva na vstup, tj. není partikulární řešení.

C) Celé řešení

$$y(t) = e^{-0,2\,t}\,(C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)) \tag{8.4}$$

D) Počáteční podmínky

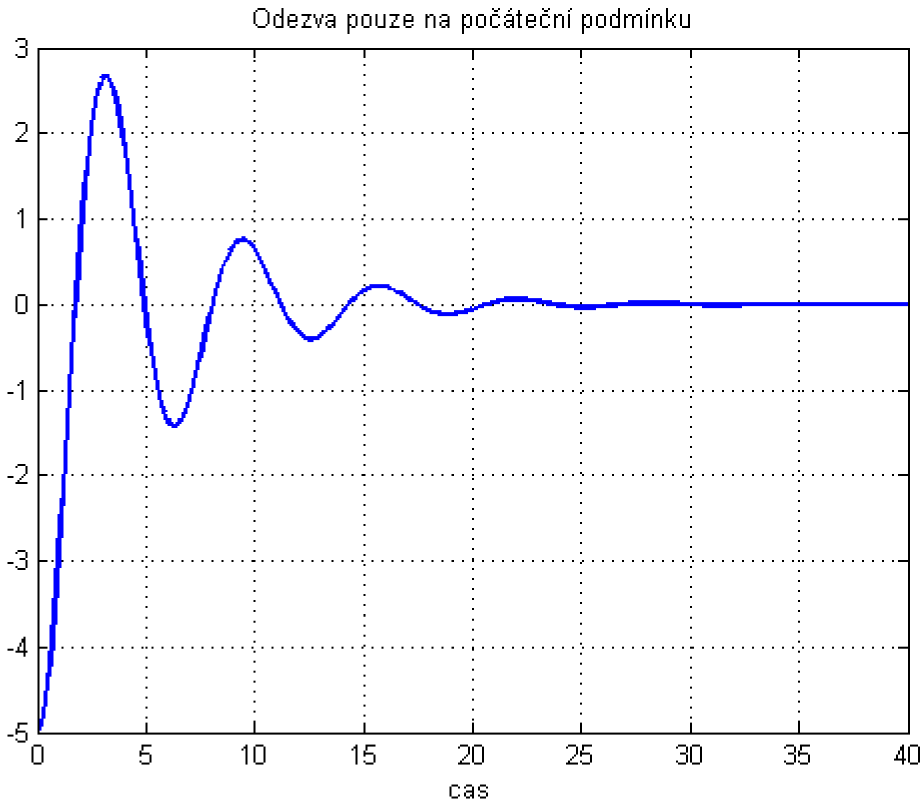
$$\begin{aligned} -5 &= e^{-0,2\cdot 0}\,(C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0)) \\ 0 &= e^{-0,2\cdot 0}\,[(-0,2C_1 - C_2)\sin(0) + (-0,2C_2 + C_1)\cos(0)] \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned} -5 &= C_2 \\ 0 &= -0,2\,C_1 + C_2 \end{aligned} \tag{8.6}$$

řešení je $C_1 = -1$ a $C_2 = -5$

Výsledné řešení

$$y(t) = e^{-0,2\,t}\,(-\sin(t) - 5\cos(t)) \tag{8.7}$$



Zadání ve wolframalpha.com

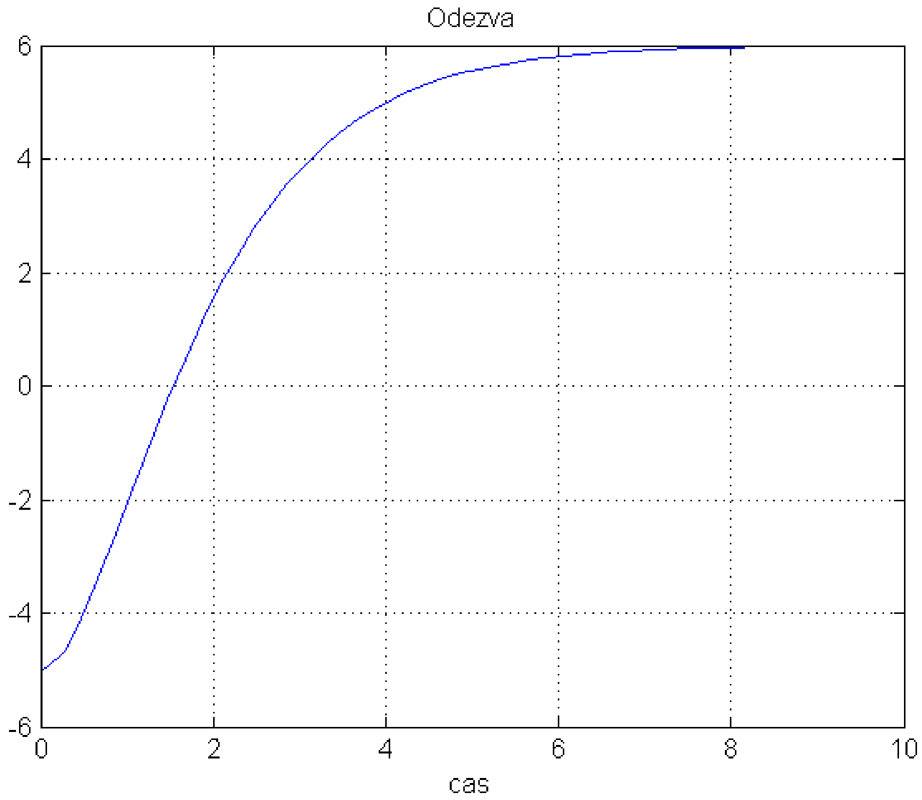
```
y'' + 0.4 y'+ 1.04 y = 0, y(0)=-5, y'(0)=0
```

V tomto případě v časech $t \in \langle 0; 30 \rangle$ převládá vliv samotného systému, který je dán homogenním řešením: $y(t) = e^{-0,2\,t}\,(C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t))$. Od času $t > 30$ již tento vliv odezněl, proto je hodnota $y(t) = 0$. Všimněte si podobnosti této křivky s křivkou odezvy na skok.

9 Ukázka řešení č. 7

$$y'' + 2y' + y = 6, \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{9.1}$$

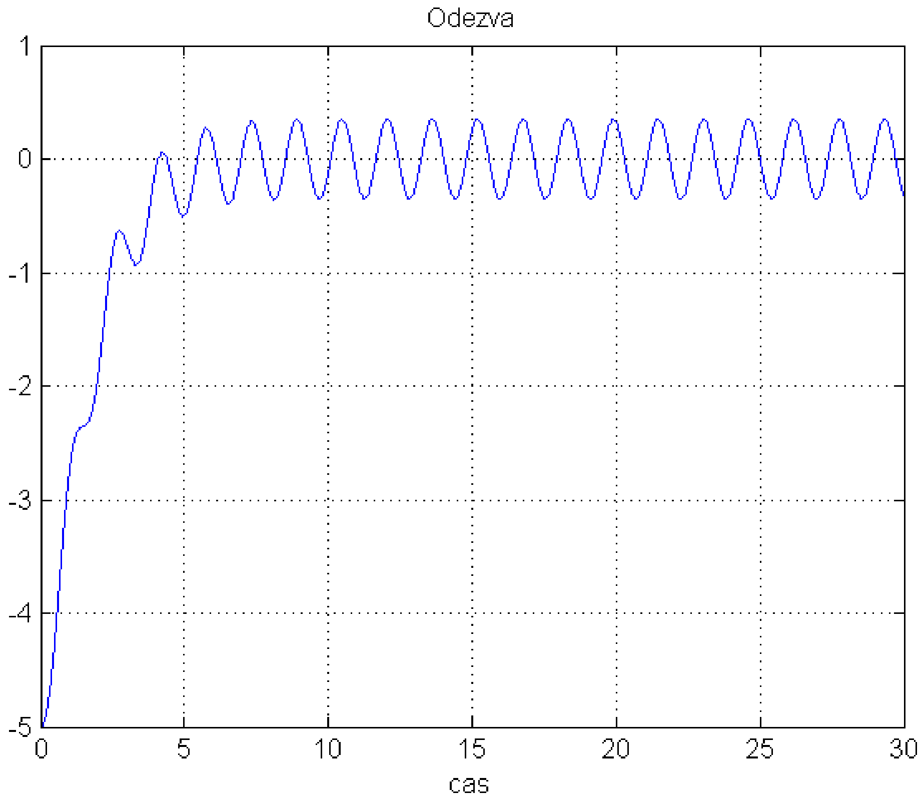
Systém bude **nekmitavý** a **stabilní**.



10 Ukázka řešení č. 8

$$y'' + 2y' + y = 6\sin(4t), \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{10.1}$$

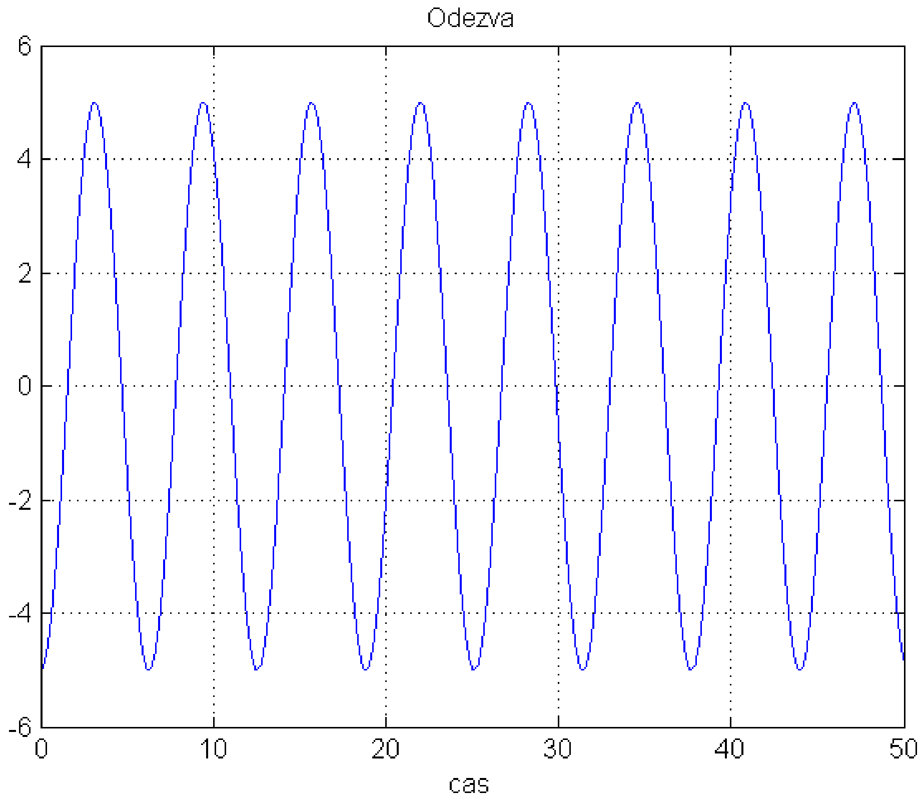
Systém bude **nekmitavý** a **stabilní**.



11 Ukázka řešení č. 9

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = -5, y'(0) = 0 \tag{11.1}$$

Systém bude **nekmitavý** a **stabilní**.



12 Porovnání pojmů – kybernetika vs. matematika

kybernetika	matematika
trajektorie	řešení diferenciální rovnice (s počátečními podmínkami)
stabilita systému	konvergence řešení diferenciální rovnice
nestabilita systému	divergence řešení diferenciální rovnice
odezva systému na počáteční podmínky (na minulé vstupy)	homogenní řešení
odezva systému vstup	partikulární řešení
vnitřní (stavový) popis	soustava diferenciálních rovnic 1.řádu
kořeny charakteristické rovnice / vlastní čísla matice / póly přenosu	kořeny charakteristické rovnice
systém 2.řádu	diferenciální rovnice 2. řádu (stupně)

13 Postup při určování chování systémů a při řešení diferenciální rovnice

Uvedený postup používáme, pokud se chceme dozvědět, jak se systém popsaný diferenciální rovnicí chová. Můžeme se pokusit najít řešení diferenciální rovnice.

Budeme uvažovat systém popsaný diferenciální rovnicí (1.1) s pravou stranou:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = u(t)$$

a systém popsaný diferenciální rovnicí (1.1) bez pravé strany, tj. $u(t) = 0$ (v tomto případě bývá zadaná počáteční podmínka $y(0)$).

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

1. Napíšeme charakteristický polynom z rovnice (1.5), bez ohledu na pravou stranu:

   $$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

   a určíme kořeny tohoto polynomu.

2. Podle toho, zda jsou kořeny reálné nebo komplexní budeme dále postupovat

   (a) kořeny reálné, dif. rovnice **s** pravou stranou $u(t)$ — systém nekmitavý — použijeme postup u ukázky řešení č. 1 (kapitola 3)

   (b) kořeny reálné, dif. rovnice **bez** pravé strany ($u(t) = 0$) — systém nekmitavý — použijeme postup u ukázky řešení č. 3 (kapitola 5)

   (c) kořeny komplexně sdružené, dif. rovnice **s** pravou stranou $u(t)$ — systém kmitavý — použijeme postup u ukázky řešení č. 4 (kapitola 6)

   (d) kořeny komplexně sdružené, dif. rovnice **bez** pravé strany ($u(t) = 0$) — systém kmitavý — použijeme postup u ukázky řešení č. 6 (kapitola 8)