UIM

Referát

Uvažujte matematický model popisující chování hmotného tělesa na pružině dle obrázku 1. Jedná se o tlumené kmity harmonického oscilátoru, kde celková síla, která působí na kmitající těleso je dána:

$$\overrightarrow{F}_{celkova} = \overrightarrow{F}_{pruziny} + \overrightarrow{F}_{odporova} \tag{1}$$

Celková síla $\overrightarrow{F}_{celkova}$ je dle Newtonova zákona dána vztahem:

$$\overrightarrow{F}_{celkova} = m \cdot a \tag{2}$$

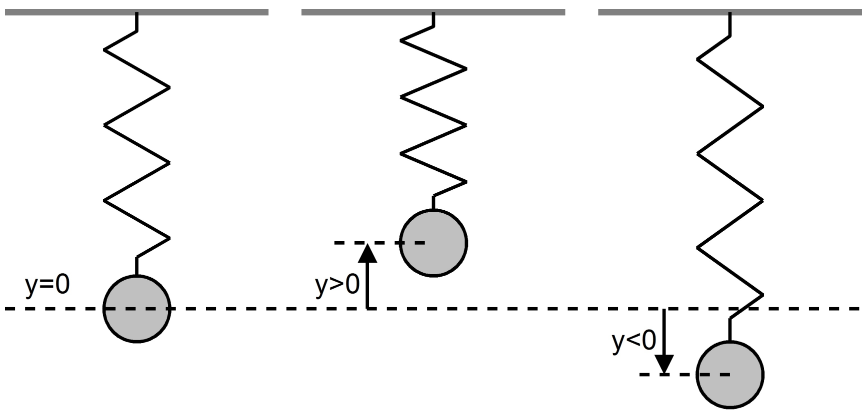
kde m je hmotnost hmotného bodu, zrychlení $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ $[m \cdot s^{-2}]$. Odporová síla $\overrightarrow{F}_{odporova}$ je úměrná rychlosti pohybu v, jen působí v opačném směru:

$$\overrightarrow{F}_{odporova} = -r \cdot v \tag{3}$$

kde rychlost $v = \frac{dy}{dt}$ $[m \cdot s^{-1}]$. Síla, kterou působí pružina na hmotný bod, je dána:

$$\overrightarrow{F}_{pruziny} = -k \cdot y \tag{4}$$

kde k je tuhost pružiny, y poloha hmotného bodu.



Obrázek 1: Kmitání hmotného bodu na pružině

Odtud po dosazení (2), (3) a (4) do rovnice (1) vznikne tzv. diferenciální rovnice druhého stupně (řádu). Tato rovnice popisuje chování hmotného bodu na pružině a s její pomocí popisujeme tzv. systém druhého řádu. V podstatě se jedná o vyjádření rovnováhy mezi polohou $y(t)$, rychlostí $v(t)$ a zrychlením $a(t)$.

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y - r \cdot \frac{dy}{dt} \tag{5}$$

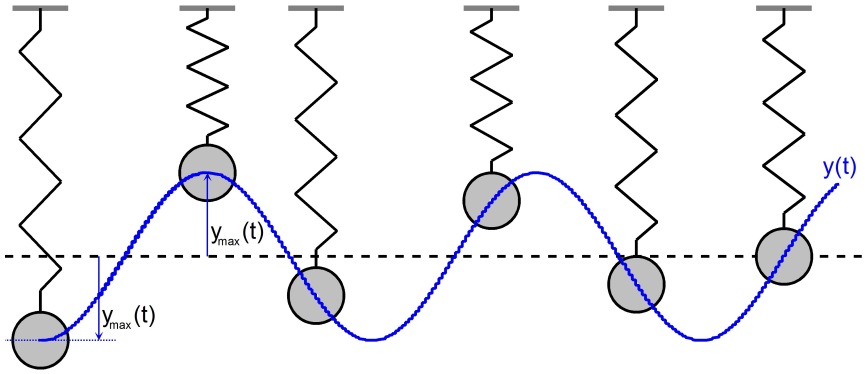
nebo-li

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b \cdot \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 \cdot y = 0 \tag{6}$$

kde b je koeficient útlumu ($b = \frac{r}{2m}$) a ω_0 je úhlová frekvence netlumených kmitů ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

Z fyzikálního principu se poloha hmotného bodu $y(t)$ mění v čase a to dle funkce sin. Poloha hmotného bodu (na obrázku vyznačena modrou čarou) se také nazývá trajektorie systému. Z matematického hlediska se jedná o řešení diferenciální rovnice (6).

Na obrázku 2 je vykreslena poloha hmotného bodu pro situaci, kdy síla $\overrightarrow{F}_{odporova} = 0$ je rovna nule. Jedná se o netlumené kmity, čili koeficient útlumu je $b = \frac{r}{2m} = 0$.



Obrázek 2: Netlumené kmity - poloha hmotného bodu

Změna polohy hmotného bodu netlumeného kmitání je daná vztahem:

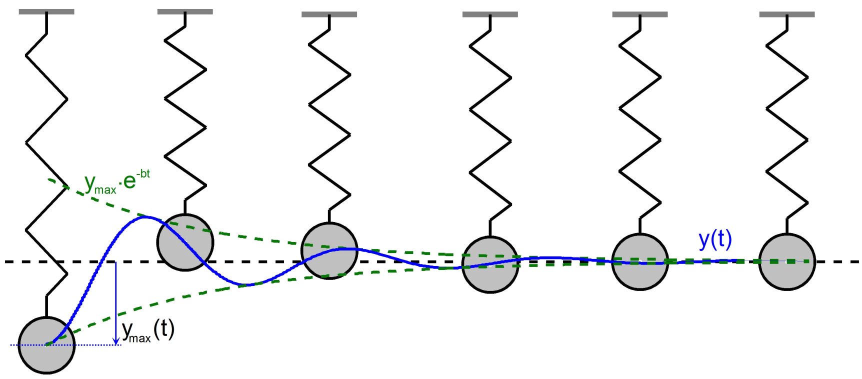
$$y(t) = y_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{7}$$

nebo ve tvaru:

$$y(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) \tag{8}$$

kde ω_0 je úhlová frekvence netlumených kmitů, $y_{max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ je maximální výchylka v čase $t = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1}$, C_1 a C_2 jsou reálné konstanty dané počátečními podmínkami.

Na dalším obrázku 3 je znázorněna poloha hmotného bodu pro tlumené kmitání, tj. koeficient útlumu je $b \neq 0$ a tedy $\overrightarrow{F}_{odporova} \neq 0$.



Obrázek 3: Tlumené kmity - poloha hmotného bodu

Jak je vidět z obrázku 3, lze změnu polohy hmotného bodu popsat vztahem:

$$y(t) = y_{max} \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{9}$$

nebo ve tvaru:

$$y(t) = e^{-bt} \cdot (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)) \tag{10}$$

kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ je úhlová frekvence tlumených kmitů. Ostatní proměnné mají stejný význam jako u netlumených kmitů výše, čili $y_{max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ je maximální výchylka v čase $t = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1}$, C_1 a C_2 jsou reálné konstanty dané počátečními podmínkami.

Rozdíl mezi tlumeným a netlumeným kmitáním je v amplitudě a v úhlové frekvenci. Při netlumeném kmitání (obrázek 2) je amplituda kmitavého pohybu rovna y_{max} a úhlová frekvence ω_0. V případě tlumeného kmitání (obrázek 3) je amplituda kmitání proměnná v čase a je rovna $y_{max} \cdot e^{-bt}$ a úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$.

Vztahy (9), resp. (10) jsou, z matematického hlediska, řešením diferenciální rovnice (6) a představují funkci polohy hmotného hodu $y\,(t)$ v čase $t\,[s]$. Záporné hodnoty $y < 0$ odpovídají situaci, kdy se pružina napíná a naopak pro $y > 0$ se pružina smršťuje. Rychlost pohybu hmotného bodu dostaneme derivací:

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{-bt} \cdot (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))\right) \tag{11}$$

kde za $y(t)$ dosadíme vztah (9), resp. (10). Zrychlení je pak druhá derivace polohy:

$$a(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{-bt} \cdot (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))\right) \tag{12}$$

případně derivace rychlosti:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(e^{-bt} \cdot (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))\right)\right) \tag{13}$$

Úkoly

1. Stanovte polohu hmotného hodu dle rovnice (10), kam dosaďte za b a $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ dle zadání. Hodnoty C_1 a C_2 jsou libovolné, reálné konstanty, prozatím neznámé.
2. Určete rychlost pohybujícího se hmotného bodu jako derivaci polohy ze vztahu (10).

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\left(e^{-bt} \cdot (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))\right)}{dt} \tag{14}$$

   Hodnoty C_1 a C_2 jsou konstanty, prozatím neznámé.

3. Určete konstanty C_1 a C_2. Tyto konstanty zohledňují počáteční podmínky pohybujícího se hmotného budu, konkrétně v čase $t = 0$, polohu $y(0)$ a rychlost $v(0)$.
4. Průběh polohy $y(t)$ načrtněte. Na základě načrtnutého průběhu polohy $y(t)$ načrtněte průběh rychlosti pohybujícího se tělesa $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$.

Zadané hodnoty

b	$\omega_0^2 \equiv$ w0 * w0	$y_0 \equiv$ y(0)

Nápověda: Konstanty C_1 a C_2 určíme z řešení diferenciální rovnice a to z řešení $y(t)$ a derivace řešení $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ pro $t = 0$.

- První rovnici určíme ze vztahu (10) za podmínky, kdy hmotný bod je v čase $t = 0$ vychýlen z rovnovážného stavu. Hodnota $y(t)$ v čase $t = 0$ je $y(0) = y_0$. Tím dostaneme první rovnici

$$y_0 = e^{-b \cdot 0} \cdot (C_1 \sin(\omega \cdot 0) + C_2 \cos(\omega \cdot 0)) \tag{15}$$

- Dále je definována počáteční podmínka, která říká, že rychlost tělesa je v čase $t = 0$ nulová, tj. $v(0) = \frac{dy(t)}{dt}|_{t=0} = y'(0) = 0$. Použijeme vztah (14), tj. zderivujeme vztah definující polohu hmotného bodu

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\left(e^{-bt} \cdot (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))\right)}{dt} \tag{16}$$

  Za čas dosadíme $t = 0$, dále dosadíme $v(0) = 0$. Tím získáme druhou rovnici.

Odtud máme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé, jejím řešením jsou konstanty C_1 a C_2.